Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Álgebra 08-1

Guía de Ejercicios

1. Indique cuál de los siguientes conjuntos establece una función:

(a) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 / b = a^p \text{ para algún } p \in N\}$

(b) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ fijos, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax^3 + bx + c\}$

(c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax^3 + bx + c \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y^2 + 2y + 1\}$

(e) $R = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 / x = (y+1)^2\}$

(f) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y^3\}$

Indicación: Dado un conjunto A, se usa la notación $A^2 = A \times A$.

2. Indique cuáles pares de funciones son iguales, si no lo son, explique por qué.

(a) $f, g : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+2}$ y $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

(b) $f, g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$ con$f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^3-x}$

(c) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = (x+2)^3$ y $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

(d) $f, g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$ con$f(x) = \frac{sen(x)}{x+1}, g(x) = \frac{sen(x-1)}{x}$

(e) $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}, g(x) = \sqrt{x}$

Indicación: Se usa la notación $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

3. Dado un conjunto $A \neq \emptyset$ y $B \subseteq A$ fijo, determine si cada una de las siguientes es función y, en caso de serlo, si es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Considere a A como el universo. Encuentre la función inversa en el caso que corresponda.

(a) $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, dada por $(\forall X \subseteq A)\ f(X) = X^c$.

(b) $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, dada por $(\forall X \subseteq A)\ g(X) = X \setminus (X^c)$.

(c) $h_1 : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, dada por $(\forall X \subseteq A)\ h_1(X) = X \cap B$.

(d) $h_2 : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(A)$, dada por $(\forall X \subseteq A)\ h_2(X) = X \cup B$.

(e) $h_3 : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, dada por $(\forall X \subseteq A)\ h_3(X) = X \triangle B$.

4. Dados dos conjuntos A y B, determine si las siguientes son funciones y si son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Encuentre la función inversa en el caso que corresponda.

   (a) $\pi_A : A \times B \to A$, dada por $(\forall (a,b) \in A \times B)\ \pi_A((a,b)) = a$.

   (b) $\pi_B : A \times B \to B$, dada por $(\forall (a,b) \in A \times B)\ \pi_B((a,b)) = b$.

   (c) $d_A : A \to A \times B$, dada por $(\forall a \in A)\ d_A(a) = (a,a)$.

   (d) $\tau : A \times B \to B \times A$, dada por $(\forall (a,b) \in A \times B)\ \tau((a,b)) = (b,a)$.

   (e) Dado $b_0 \in B$ fijo. $f : A \to A \times B$, dada por $(\forall a \in A)\ f(a) = (a, b_0)$.

5. Comente sobre la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de las siguientes funciones. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = sen(x)$

   (d) $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{2x^2-5x+4}$

   Indicación: >Se puede *redefinir* el dominio o el conjunto de llegada de f de modo que la función logre ser inyectiva o sobreyectiva?.

6. Encuentre la función inversa de las siguientes funciones, verificando previamente si son biyectivas.

   (a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \frac{1}{x^3}$

   (b) Sea $a \neq 0$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = ax + b$

   (c) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = sen(x^2)$

   (d) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$