Guía de Ejercicios

1. Dadas $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones, demuestre las siguientes propiedades enunciadas en las tutorías:

(a) Si f y g son inyectivas, entonces $(g \circ f)$ es inyectiva.

(b) Si f y g son biyectivas, entonces $(g \circ f)$ es biyectiva.

(c) Si $(g \circ f)$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva (f no necesariamente lo es).

2. Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tres funciones dadas por $f(x) = 1 - x$, $g(x) = -x - 1$ y $h(x) = x + 2$.

(a) Verificar que cualquier composición entre estas tres funciones (por ej.: $f \circ (h \circ g)$, $f \circ g$, $(h \circ h) \circ g$, etc.), resulta ser una función invertible.

(b) Pruebe que $h \circ g \circ f = g \circ f \circ h = id_{\mathbb{Z}}$, en donde $id_{\mathbb{Z}}$ es la función identidad.

(c) Deducir de lo anterior que $f^{-1} \circ g^{-1} = h$.

3. Dados dos conjuntos A y B, determine el conjunto imagen de las siguientes funciones.

(a) $\pi_A : A \times B \to A$, dada por $(\forall (a,b) \in A \times B)\ \pi_A((a,b)) = a$.

(b) $\pi_B : A \times B \to B$, dada por $(\forall (a,b) \in A \times B)\ \pi_B((a,b)) = b$.

(c) $d_A : A \to A \times B$, dada por $(\forall a \in A)\ d_A(a) = (a,a)$.

(d) $\tau : A \times B \to B \times A$, dada por $(\forall (a,b) \in A \times B)\ \tau((a,b)) = (b,a)$.

(e) Dado $b_0 \in B$ fijo. $f : A \to A \times B$, dada por $(\forall a \in A)\ f(a) = (a, b_0)$.

4. Considere las mismas funciones del ejercicio anterior, pero suponiendo $A = B$. Indique si se pueden o no definir las siguientes funciones. En los casos afirmativos, determínelas.

(a) $\pi_A \circ \pi_B$.

(b) $\pi_B \circ d_A \circ \pi_A$.

(c) $\pi_B \circ \tau$.

(d) $\pi_A \circ \tau \circ f$.

(e) $d_A \circ f \circ \pi_A$.

5. Dado un conjunto $A \neq \emptyset$ y $B \subseteq A$ fijo, determine el conjunto imagen de las siguientes funciones. Además, determine la preimagen de los conjuntos $\mathcal{C}_1 = \{B\}$, $\mathcal{C}_2 = \{A\}$ y $\mathcal{C}_3 = \{A, \emptyset\}$.

(a) $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, dada por $(\forall X \subseteq A)\ f(X) = X^c$.

(b) $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, dada por $(\forall X \subseteq A)\ g(X) = X \setminus (X^c)$.

(c) $h_1 : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, dada por $(\forall X \subseteq A)\ h_1(X) = X \cap B$.

(d) $h_2 : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(A)$, dada por $(\forall X \subseteq A)\ h_2(X) = X \cup B$.

(e) $h_3 : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, dada por $(\forall X \subseteq A)\ h_3(X) = X \triangle B$.

6. Dadas $f : A \to B$, función y $A_1, A_2 \subseteq A$, demuestre las siguientes propiedades enunciadas en las tutorías:

(a) f es sobreyectiva $\iff f(A) = B$.

(b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

(c) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(d) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$

7. Dadas $f : A \to B$, función y $B_1, B_2 \subseteq B$, demuestre las siguientes propiedades:

(a) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(c) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$.

(d) $f^{-1}(B_1^c) = (f^{-1}(B_1))^c$.

(e) $f^{-1}(B_1 \triangle B_2) = f^{-1}(B_1) \triangle f^{-1}(B_2)$.