Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Álgebra 08-1

Guía de Ejercicios

1. Encuentre el valor de las siguientes sumas, usando sumas conocidas:

a) $\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$.
b) $\sum_{k=3}^{n-1}(k-2)(k+1)$.
c) $\sum_{k=4}^{n-2} 2k^3 - \frac{1}{3}k + 2$.
d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!(1-k)}{k^2+k}$.
f) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k}$.
g) $\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i$. $\quad (= \frac{x^n - y^n}{x-y})$

2. Encuentre el valor de las siguientes sumas, usando el teorema del binomio:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!}$.
c) $\sum_{k=3}^{n-2} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
d) $\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^k b^{n-k}$.
e) $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} 2^k (-1)^{n-k}$.
f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n-1}{k!\,(n-k)!}$.
g) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$.
h) $\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} \quad (= \binom{n+2}{3})$.
i) $\sum_{i=1}^{n} \binom{i+j-1}{j} \quad (= \binom{n+j}{j+1})$.
j) $\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}$.
k) $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.
l) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

3. Encuentre el valor de los coeficientes pedidos:

a) El coeficiente de x^{50} en el desarrollo de $(x-a)^{100}$, con $a \in \mathbb{R}$.
b) El coeficiente de x^{10} en el desarrollo de $(x+2a)^{50}$, con $a \in \mathbb{R}$.

c) El coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(x^3 + x^2 + x + 1)^3$.

d) El coeficiente de x^n en el desarrollo de $(x^n - a^n)^n$, con $a \in \mathbb{R}$.

e) El coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(1 + 2x + 3x^2)^5$.

4. Sean k, p, n naturales tales que $0 \leq k \leq p \leq n$. Pruebe las siguientes igualdades:

a) $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$

b) $\binom{n}{0}\binom{n}{p} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} + ... + \binom{n}{p}\binom{n-p}{0} = 2^p\binom{n}{p}$.

c) $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$

5. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una progresión aritmética.

a) Si $a_i = x$, $a_j = y$, $a_k = z$ para $i, j, k \in \mathbb{N}$.Pruebe que $(j-k)x+(k-i)y+(i-j)z = 0$.

b) Pruebe que :

$$\frac{1}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_n}}.$$