Guía de Ejercicios

Observación: En esta guía se entiende como *plano complejo*, la representación como $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$.

1. (a) Considere el conjunto de los números pares $\mathcal{P}$, dotado con la multiplicación y suma usual en $\mathbb{R}$. Determine si la estructura $(\mathcal{P},+,\cdot)$ es un anillo.

(b) Si la respuesta de la parte anterior es negativa, señale qué propiedad falla.

2. Demuestre, para un anillo $(A,+,\cdot)$, las siguientes propiedades propuestas en la tutoría:

(a) $(\forall x,y\in A)\ -(x\cdot y)=(-x)\cdot y=x\cdot(-y)$.

(b) $(\forall x,y\in A)\ (-x)\cdot(-y)=x\cdot y$.

3. Pruebe que en un anillo con más de dos elementos, el neutro para la operación $\cdot$ y para la operación $+$ son necesariamente distintos.

4. Sean $(A,+,\cdot)$ y $(A',\oplus,\odot)$ dos anillos con neutros aditivos 0 y $0'$ respectivamente y $f:A\longrightarrow A'$ un homomorfismo de anillos. Se define $I=\{x\in A: f(x)=0'\}$.

(a) Demuestre que $(I,+)$ es subgrupo de $(A,+)$

(b) Demuestre que $(\forall a\in A)(\forall b\in I)a\cdot b\in I\wedge b\cdot a\in I$.

(c) Si $(A,+,\cdot)$ tiene unidad u (neutro para $\cdot$) y $\exists x\in I$ tal que x es invertible, pruebe que $f(u)=0'$ y utilícelo para demostrar que $(\forall a\in A)a\in I$, es decir $A=I$.

5. Pruebe que si $(\mathbb{Z}_n,+_n,\cdot_n)$ no tiene divisores de cero, entonces n es un número primo.

6. Demuestre, dados $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, las siguientes propiedades propuestas en la tutoría:

(a) $\mathbb{R}\mathrm{e}(z_1+z_2)=\mathbb{R}\mathrm{e}(z_1)+\mathbb{R}\mathrm{e}(z_2)$.

(b) $\mathbb{I}\mathrm{m}(z_1+z_2)=\mathbb{I}\mathrm{m}(z_1)+\mathbb{I}\mathrm{m}(z_2)$.

(c) $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha z)=\alpha\mathbb{R}\mathrm{e}(z)$.

(d) $\mathbb{I}\mathrm{m}(\alpha z)=\alpha\mathbb{I}\mathrm{m}(z)$.

(e) $z_1=z_2\iff\mathbb{R}\mathrm{e}(z_1)=\mathbb{R}\mathrm{e}(z_2)\wedge\mathbb{I}\mathrm{m}(z_1)=\mathbb{I}\mathrm{m}(z_2)$.

7. Demuestre las siguientes propiedades, dados $z,w\in\mathbb{C}$

(a) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$, $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$.

(b) Si $w\neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

(c) $\mathbb{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathbb{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

8. Grafique en el plano complejo, escribiendo de forma cartesiana los siguientes números complejos:

(a) $1+2i$.

(b) $(1+2i)^2$.

(c) $(1+2i)(3-2i)$.

(d) $\dfrac{1+i}{2-i}$.

(e) $\overline{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$.

9. Demuestre, dados $z, w \in \mathbb{C}$, las siguientes propiedades:

(a) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

(b) $z = 0 \iff |z| = 0$.

(c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(d) Si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

10. Encuentre la intersección de las siguientes regiones del plano complejo

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-1| \leq 1\} \qquad R_2 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-2| \leq 1\}.$$

Indicación: Grafique.