Guía de Ejercicios

1. Dado el polinomio $p(x) = x^5 - 2x^2 + 1$, divídalo por los siguientes polinomios d, para obtener $p = q \cdot d + r$. En cada caso, explicite los polinomios q y r.

(a) $d(x) = x^5$.

(b) $d(x) = x^2 - 2$.

(c) $d(x) = x^3$.

(d) $d(x) = x^2 - 3x + 1$.

(e) $d(x) = x - 1$.

2. Demuestre la siguiente propiedad propuesta en la tutorÃa: Sean $n \geq 1$, y $p, q \in \mathbb{K}[x]$ tales que $\text{gr}(p) \leq n$ y $\text{gr}(q) \leq n$. Si p y q coinciden en $n+1$ puntos distintos, entonces son iguales (como polinomios). Para ello:

(a) Pruebe que dado $n \in \mathbb{N}$, si un polinomio r es tal que $\text{gr}(r) \leq n$ y tiene $n+1$ raíces, entonces $r = 0$. O sea, r es el polinomio nulo.

(b) Concluya la propiedad, considerando el polinomio $r = p - q$ y aplicando lo anterior.

3. Considere $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$, pruebe que si $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ entonces $x = 1$ es raíz de p.

4. Encuentre las raíces de $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x$.
Indicación: Trate de encontrar una raíz por tanteo y luego use división.

5. Considere el polinomio $p(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 4$.

(a) Encuentre un conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$, tal que toda raíz $x \in \mathbb{Q}$ de p pertenezca a A.
Indicación: Use los resultados para polinomios con coeficientes enteros.

(b) Use el Algoritmo de Horner (Regla de Ruffini), para encontrar todas las raíces de p en $\mathbb{Q}$.
Indicación: Le basta buscar en el conjunto A, encontrado en la parte (a).

6. Para cada polinomio p, determine el cuociente y resto de dividir p por $(x - 2)$. ¿Es $x = 2$ raíz de estos polinomios?

(a) $p(x) = 2x^3 - x^2 - x + 1$.

(b) $p(x) = 5x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$.

(c) $p(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2$.

(d) $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - x - 2$.

Indicación: Use el Algoritmo de Horner.