



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Álgebra 08-1

Guía de Problemas

P1. (20 min.) Demuestre, sin usar inducción, que:

$$\sum_{k=1}^n (1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{k-1}) \binom{n}{k} = \frac{5^n - 2^n}{3}.$$

P2. (20 min.) Calcule, sin usar inducción:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{8^{k+1}}{3^i}.$$

P3. (20 min.) Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \mathbb{N}, x = \frac{k}{3^i}\}$. Pruebe que A es numerable.

P4. (30 min.) Pruebe que el siguiente conjunto es numerable:

$$C = \{x \in [0, +\infty) / \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}$$

P5. (a) (20 min.) Pruebe que el conjunto de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$ y cortan al eje OX en una coordenada racional es numerable.

(b) (20 min.) Pruebe que el conjunto de todas las rectas no verticales que no pasan por el origen y cortan a los ejes OX y OY en coordenadas racionales es numerable.

P6. (30 min.) Sea $A = \{\frac{p}{q} / (\exists n \in \mathbb{N}, q = 2^n) \wedge (p \in \mathbb{N}, p < q)\}$. Probar que A es numerable.

Indicación: Puede usar que la unión numerable de conjuntos finitos no vacíos es numerable.

P7. (30 min) Sea $A = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ y considere la secuencia de elementos en A , $(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ (es decir, $x_i \in A$ para cada $i \in \mathbb{N}$). Probar que existen $\ell, j \in \mathbb{N}$, $\ell \neq j$, tales que $x_\ell = x_j$.

P8. Sea $E = \{(a_1, \dots, a_n) \in \{-1, 1\}^n / n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{i=1}^n a_i = 0\}$. Demuestre que

(a) (15 min.) E es infinito

(b) (15 min.) E tiene la misma cardinalidad de \mathbb{N}