Guía de Problemas

Observación: En esta guía la notación A^k, para un A conjunto y $k \in \mathbb{N} \leq 1$, está dada por:

$$A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{\text{k veces}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid (\forall i \in \{1, \ldots, k\})\ x_i \in A\}.$$

P1. (15 min.) Pruebe que el conjunto $E = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^2 / \exists n \in \mathbb{N},\ x_1 + x_2 + x_3 = n\}$ es numerable.

P2. Pruebe que los siguientes conjuntos son no numerables:

(a) (15 min.) $A = \{x \in \mathbb{R}^3 / \exists n \in \mathbb{N},\ x_1 + x_2 + x_3 = n\}$.

(b) (15 min.) $\mathcal{T} = \{T \subseteq \mathbb{R}^2 \mid T \text{ es un triángulo}\}$.

P3. (20 min.) Pruebe que el conjunto de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$ es no numerable.

P4. (a) (20 min.) Sea A un conjunto no numerable, y sea $B \subseteq A$ un conjunto numerable. Pruebe que el conjunto $A \setminus B$ es no numerable.

(b) (10 min.) Demuestre, usando lo anterior, que el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales es no numerable.

P5. Dado un conjunto no vacío A, sea $\mathcal{F} = \{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Se define la operación $\star$ dada por:

$$(\forall f, g \in \mathcal{F})\ f \star g = (f \circ g)^{-1}.$$

(a) (5 min.) Pruebe que $(\mathcal{F}, \star)$ es una estructura algebraica.

(b) (10 min.) Estudie la asociatividad de $\star$.

(c) (10 min.) Estudie la conmutatividad de $\star$.

(d) (10 min.) Encuentre el neutro en $(\mathcal{F}, \star)$.

(e) (10 min.) Determine si todo elemento $f \in \mathcal{F}$ admite un inverso para $\star$. En caso afirmativo, determínelo.

(f) (10 min.) Encuentre los elementos idempotentes de $(\mathcal{F}, \star)$

P6. Sea $(E, *)$ una estructura algebraica y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia que satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall x_1, x_2, y_1, y_2)\ \ x_1 \mathcal{R} x_2 \wedge y_1 \mathcal{R} y_2 \Rightarrow (x_1 * y_1) \mathcal{R} (x_2 * y_2).$$

Definimos una nueva l.c.i. $\otimes$ sobre el conjunto cuociente $E/\mathcal{R}$ mediante:

$$[x]_{\mathcal{R}} \otimes [y]_{\mathcal{R}} = [x * y]_{\mathcal{R}}.$$

(a) (15 min.) Pruebe que $\otimes$ está bien definida, es decir que la clase de equivalencia de $x * y$ no depende de los representantes de $[x]_{\mathcal{R}}$ e $[y]_{\mathcal{R}}$ que se escojan.

(b) (10 min.) Suponiendo que $(E, *)$ posee un neutro e, encuentre el neutro de $(E/\mathcal{R}, \otimes)$.

(c) (15 min.) Dado un elemento $x \in E$ que posee inverso en $(E, *)$, determine el inverso de $[x]_{\mathcal{R}} \in E/\mathcal{R}$ en $(E/\mathcal{R}, \otimes)$.