Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Chile

Guía de Problemas

P1. (30 min.) Sea $(G,*)$ un grupo y $f:G\to G$ la función definida por $f(g)=g^{-1}$ para cada $g\in G$ (recordar que g^{-1} es el inverso de g para la operación $*$). Probar que

$$f \text{ es un isomorfismo } \Leftrightarrow G \text{ es un grupo Abeliano.}$$

P2. Sea $(G,*)$ un grupo con neutro $e\in G$ y

$$A=\{F:G\to G \;/\; F \text{ es un isomorfismo de } (G,*) \text{ en } (G,*)\}.$$

(a) (20 min.) Probar que $(A,\circ)$ es un grupo

(b) (20 min.) Para cada $g\in G$ se define la función $F_g:G\to G$ tal que $F_g(x)=g*x*g^{-1}$ en cada $x\in G$. Pruebe que:

- F_g es un homomorfismo de $(G,*)$ en $(G,*)$.
- $F_{g*h}=F_g\circ F_h$, para todo $g,h\in G$.
- $F_e=id_G$ (id_G es la función identidad en G).

Concluya que F_g es un isomorfismo y que $(F_g)^{-1}=F_{g^{-1}}$ para todo $g\in G$.

(c) (20 min.) Pruebe que $B=\{F_g \;/\; g\in G\}$ es un subgrupo de $(A,\circ)$.

P3. (20 min.) Sea $(G,*)$ un grupo que satisface la propiedad $a*a=e$ (el neutro del grupo) en cada $a\in G$, es decir, el inverso de cada elemento del grupo es el mismo elemento. Pruebe que G es un grupo Abeliano. (Ind: calcule $(a*b)*(b*a)$).

P4. (20 min.) Sea $(G,*)$ un grupo tal que $G=\{e,a,b\}$ con e neutro en G. Pruebe que $a^{-1}=b$.

P5. Sean $(G,*)$ y $(H,\circ)$, grupos con neutros e_G y e_H respectivamente. Se define en $G\times H$ la ley de composición interna $\triangle$ por:

$$(a,b)\triangle(c,d)=(a*c,b\circ d)$$

(a) (20 min.) Demuestre que $(G\times H,\triangle)$ es grupo.

(b) (20 min.) Demuestre que las funciones φ y ψ definidas por

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & G\times H & \longrightarrow & G \\ & (g,h) & \longmapsto & \varphi((g,h))=g \end{array} \quad y, \quad \begin{array}{rccl} \psi: & G\times H & \longrightarrow & H \\ & (g,h) & \longmapsto & \psi((g,h))=h \end{array}$$

son homomorfismos sobreyectivos.

(c) (20 min.) Considere $G=H$ y $*=\circ$ y la función $f:G\times G\to G$ definida por

$$f((a,b))=(a*b)^{-1} \quad \forall(a,b)\in G\times G$$

Pruebe que

$$f \text{ es un homomorfismo de } (G\times G,\triangle) \text{ en } (G,*) \Leftrightarrow \text{ El grupo } (G,*) \text{ es abeliano.}$$