Guía de Problemas

P1. **(a)** (20 min.) Demuestre que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 \cdot \bar{z_2} + \bar{z_1} \cdot z_2 = 2|z_1 \cdot z_2| \cos\phi$$

donde ϕ es el ángulo entre los complejos z_1 y z_2

(b) (20 min.) Sean, s, u, v complejos que satisfacen la relación $s = u - v$ y ϕ es el ángulo entre los complejos u y v. Demuestre que

$$|s|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos\phi$$

P2. (20 min.) Se define la relación $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ por

$$z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia y determine y grafique la clase de equivalencia del complejo $z_0 = 2 + i\sqrt{5}$

P3. (20 min.) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\rho \in \mathbb{R}$, el complejo

$$z = (1 + \rho e^{i\pi/2})^n + (1 - \rho e^{i\pi/2})^n \in \mathbb{R}$$

P4. (15 min.) Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces pruebe que

$$|z + i| = |z - i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

P5. (15 min.) Muestre que el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left|\frac{z-2}{z+1}\right| = 2$$

es una circunferencia en el plano complejo. Determine su centro y su radio.

P6. (15 min.) Expresar de la forma $a + bi$ los siguientes complejos

$$(1-i)^4(1+i)^4, \quad \text{y} \quad 1 + i + \frac{i-1}{|1-i|^2 + i}$$

P7. Considere los números reales $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k \cdot \alpha)$ y $S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k \cdot \alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) (30 min.) Probar la igualdad de números complejos

$$S + iS' = (1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n$$

(b) (30 min.) Escriba el número complejo $1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ en forma polar y deduzca que

$$S = 2^n (\cos(\alpha/2))^n \cdot \cos(n \cdot \alpha/2) \text{ y } S' = 2^n (\cos(\alpha/2))^n \cdot \sin(n \cdot \alpha/2)$$

(recuerde que: $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ y $\cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$)