Guía de Problemas

P1. (30 min.) Sea $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ un polinomio con raíces $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$. Pruebe que:

$$\alpha\beta\gamma = -c, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b, \quad \alpha + \beta + \gamma = -a$$

y use esto para encontrar las raíces del polinomio $q(z) = z^3 - 11z^2 + 44z - 112$ sabiendo que tiene una raíz compleja (i.e en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) de módulo 4.

P2. (30 min.) Sabiendo que la ecuación $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$ admite una solución $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de módulo $\sqrt{13}$, determinar todas las soluciones (en $\mathbb{C}$) de la ecuación.

P3. (30 min.) Si $n = 3k \pm 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, probar, sin usar inducción, que $x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

P4. (30 min.) Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, con $a_0, \ldots, a_{n_1} \in \mathbb{C}$, tal que $p(x)$ tiene n raíces distintas en $\mathbb{C}$ y si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de $p(x)$, entonces su conjugado $\bar{z}$ también lo es. Demuestre que $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Indicación: Estudie el producto de polinomios $(x - z)(x + \bar{z})$ donde $z \in \mathbb{C}$.

P5. (30 min.) Sean $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\mathrm{gr}(g(x)) \geq 4$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$. Se sabe que:

- El resto de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)$ es cx.
- El resto $r(x)$, de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)(x - a)$ es un polinomio mónico, es decir, el coeficiente asociado a x^n, donde $n = \mathrm{gr}(r(x))$, es igual a 1.

(a) Determine los valores $p(b)$ y $p(-b)$.

(b) Justifique que $\mathrm{gr}(r(x)) \leq 2$.

(c) Determine $r(x)$.