Guía de Problemas

P1. (15 min.) Sean $F, G, H, R, R' \in \mathbb{K}[x]$ polinomios tales que $G, H \neq 0$. Si el resto de dividir F por $G \cdot H$ es R y el resto de dividir R por G es R', determine el resto de dividir F por G.

P2. (30 min.) Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $r(x)$ el resto de la división de $p(x)$ por $(x-1)$. Si $r(4) = 0$ y $x = i$ es raíz de $p(x)$, calcule a, b y c.

P3. El objetivo de este problema es probar el **Teorema de Interpolación**. Sea $\mathbb{K}$ cuerpo, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, con $x_j \neq x_k$ si $j \neq k$. Entonces existe un único polinomio p de grado menor o igual a $(n-1)$ en $\mathbb{K}[x]$ tal que $\forall j = 1, \ldots, n \quad p(x_j) = y_j$. Llamemos a este polinomio, polinomio de interpolación de la familia $(\{x_j\}_{j=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n)$.

(a) (20 min.) Suponiendo la existencia de $p(x)$, demuestre la unicidad.

(b) (40 min.) Para cada $j = 1, \ldots, n$ definimos:

$$l_j(x) = \frac{\Pi_{k=1 (k\neq j)}^n (x - x_k)}{\Pi_{k=1 (k\neq j)}^n (x_j - x_k)} \in \mathbb{K}[x].$$

1. Determine el grado de $l_j(x)$ y pruebe que:

$$l_j(x_r) = \delta_{jr} = \begin{cases} 1, & j = r \\ 0, & j \neq r \end{cases} \qquad \forall j, r = 1, \ldots, n.$$

2. Demuestre que $p(x) = \sum_{j=1}^n y_j l_j(x) \in \mathbb{K}[x]$ es polinomio de interpolación para la familia $(\{x_j\}_{j=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n)$.

P4. Sea $J_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{gr}(p) \leq 2, a_0 = 0, a_1 \neq 0\}$. En J_2 se define la l.c.i. $\triangle$ a través de $p(x) \triangle q(x) = \sum_{i=1}^2 c_i x^i$ en que $p(q(x)) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$.

(a) (20 min.) Probar que $(J_2, \triangle)$ es grupo no abeliano.

(b) (20 min.) Sea $f : J_2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f(a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) = a_1$. Probar que f es un morfismo sobreyectivo de $(J_2, \triangle)$ en $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

(c) (20 min.) Sea $H = \{p(x) \in J_2 \mid a_2 = 1\}$. Probar que $(H, \triangle)$ es subgrupo abeliano de $(J_2, \triangle)$.