Funciones

16 de marzo de 2007

Introducción

Ya que conocemos el producto cartesiano $A \times B$ entre dos conjuntos A y B, podemos definir entre ellos algún tipo de correspondencia. Es decir, asociar de algún modo elementos de A con elementos de B.

Una de las posibles formas de hacer esto es mediante una **función**. Formalmente:

Función

Llamaremos función de A en B a cualquier $f \subseteq A \times B$ tal que

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B) \quad (a, b) \in f$$

Usaremos la notación $f : A \to B$ si es que f es una función de A en B.

Podemos entender una función como una regla de asociación que, dado un elemento cualquiera de A, le asigna un único elemento de B. Gracias a esto, si f es función y $(a, b) \in f$, entonces podemos usar la notación $b = f(a)$. O sea, llamamos $f(a)$ al (único) elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Consideremos $f = \{(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | p = 2n\}$. Esta f resulta ser una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, pues el único valor que estamos asociando a cada natural n es el natural $p = 2n$.

Desde ahora, pensaremos en las funciones simplemente como reglas de asociación entre dos conjuntos. Así, la función f que definimos en el párrafo anterior podemos describirla como

> *"$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la función dada por $f(n) = 2n$ para cada $n \in \mathbb{N}$"*

Introducción: Ejemplos de funciones

Veamos otras funciones:

Ejemplos

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
   f es una función, pues a cada $x \in \mathbb{R}$ le asociamos el número real $x^2 = x \cdot x$. Este valor es único pues la multiplicación de x por sí mismo posee un solo resultado.
2. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = p$, donde p es el mayor número entero tal que $p \leq x$.
   Aunque aún no tenemos las herramientas para demostrar que g es efectivamente una función, intuitivamente sabemos que lo es: a cada número real x le asociamos el número entero más cercano que tenga, que sea menor o igual que él. Por ejemplo $g(11/2) = 5$; $g(3) = 3$ y $g(-3/2) = -2$.
3. Un ejemplo importante, que utilizaremos después, es la llamada función **identidad** de un conjunto A. Ésta es la función $id_A : A \rightarrow A$, que se define por $id_A(x) = x$ para cada $x \in A$.
4. Cuando tenemos conjuntos A y B que tienen pocos elementos, podemos definir una función $f : A \rightarrow B$ mediante un diagrama de flechas, como en el ejemplo de la figura. Aquí, lo importante para que f sea efectivamente una función, es que desde cada elemento de A debe partir una única flecha hacia algún elemento de B.

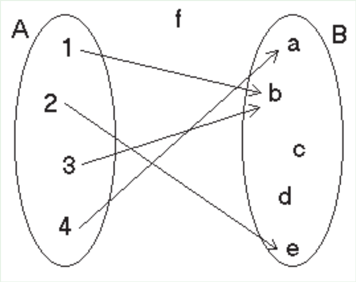

Figura: Una función definida mediante diagrama de flechas.

Introducción: Ejemplos de funciones

Ejemplos

5. En una tienda, cada producto tiene asociado un único precio. Así, podemos definir la función $v : X \to \mathbb{N}$, donde denotamos por X el conjunto de productos que la tienda dispone, y $v(x)$ es el precio en pesos del producto x.
   También podemos considerar la función $s : X \to \mathbb{N}$, donde $s(x)$ es la cantidad de unidades disponibles (el stock) del producto x.

A pesar de que conocemos la definición de qué significa ser función, hay que tener un mínimo de cuidado. Hay objetos que parecen funciones, pero no lo son. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Considere el conjunto de puntos $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$. Hay dos razones que impiden que f constituya una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

- El valor $f(x)$ no está definido para todos los números reales x. A modo de ejemplo, $f(2)$ debiera ser el número real y que cumple que $2^2 + y^2 = 1$, pero esto equivale a decir que $y^2 = -3$, lo cual es falso para cualquier $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, f no está asociando ningún número real al real $x = 2$.
  De la misma forma, se puede demostrar que $f(x)$ no está definido para cualquier $x \in \mathbb{R}$ que cumpla $x < -1 \vee x > 1$.

Introducción: Ejemplos de funciones

Ejemplo

- Lo más grave, sin embargo, es que existen números reales x a los cuales f les está asociando más de un valor y: en efecto, basta notar que para $x = \frac{3}{5}$, hay dos valores de $y \in \mathbb{R}$ que cumplen $x^2 + y^2 = 1$: éstos son $y_1 = \frac{4}{5}$ e $y_2 = \frac{-4}{5}$.
  De la misma forma, se demuestra que f está asociando dos valores distintos a todos los reales x que cumplen $-1 < x < 1$.

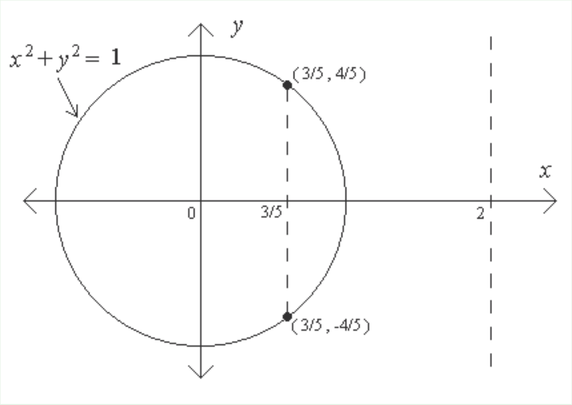

Figura: Este diagrama no define una función.

Igualdad de funciones

Supongamos que $f : A \rightarrow B$ es una función. Al conjunto A le llamaremos **dominio** de f, o **conjunto de partida** de f, y lo denotaremos $\text{Dom}(f)$.

De igual modo, al conjunto B le llamaremos **conjunto de llegada** de f, y lo denotaremos $\text{Rec}(f)$.

Sean $f, g : A \rightarrow B$ dos funciones. Una forma de definir igualdad entre funciones es comparar los resultados que ellas dan cuando se les entrega cada uno de los elementos de A. Es decir, definir

$$f = g \iff (\forall a \in A) f(a) = g(a)$$

¿Qué definición de igualdad podemos usar cuando $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$?

Igualdad de funciones

Notemos que nuestra definición anterior sólo tiene sentido cuando $A = C$, es decir cuando $\text{Dom}\,(f) = \text{Dom}\,(g)$.

¿Tendrá sentido preguntarse si son iguales dos funciones que no parten del mismo conjunto? O sea, no sólo la definición de los valores de la función es relevante para que haya igualdad, sino que también importa cuáles son los dominios y los conjuntos de llegada de las dos funciones.

Así, nuestra definición de igualdad para cualquier par de funciones será la siguiente:

Igualdad de funciones

Si $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son funciones, entonces

$$f = g \iff \left[\begin{array}{c} \text{Dom}\,(f) = \text{Dom}\,(g) \\ \wedge \\ \text{Rec}\,(f) = \text{Rec}\,(g) \\ \wedge \\ (\forall x \in \text{Dom}\,(f)) f(x) = g(x) \end{array}\right]$$

Igualdad de funciones

Ejemplo:¿son iguales estas funciones?

Consideremos la funciones f y g dadas por

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} \qquad g(x) = (x+2)$$

Aunque a primera vista ambas funciones nos parecen iguales, esto no es así. Primero debemos notar que nuestra definición de f y g no ha sido todo lo rigurosa que debiera.

¿Cuáles son el dominio y el conjunto de llegada de f y g?

g es una función que está bien definida para cualquier elemento de $\mathbb{R}$, por lo que podemos considerar $\text{Dom}\,(g) = \mathbb{R}$. Asimismo, tenemos que $\text{Rec}\,(g) = \mathbb{R}$.
Para f, sin embargo, observamos que el valor $f(x)$ no está bien definido para $x = 1$: en efecto, no se puede dividir por cero. En ese caso, vemos que $\mathbb{R}$ no puede ser el dominio de f. Sí podría serlo $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Para el conjunto de llegada el análisis puede ser más sencillo, y consideraremos $\text{Rec}\,(f) = \mathbb{R}$ también (como ejercicio para el lector, puede mostrar que también se puede considerar $\text{Rec}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$).

Hemos concluido que $\text{Dom}\,(f) \neq \text{Dom}\,(g)$, así que ambas funciones ya no pueden ser iguales. Si nos empeñamos en querer compararlas, podemos hacer lo siguiente: ver a g como si fuera una función solamente definida de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en $\mathbb{R}$. Es decir, nos olvidamos que g también puede ser evaluada en $x = 1$. En tal caso, $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \text{Dom}\,(g)$, y además $\text{Rec}\,(f) = \mathbb{R} = \text{Rec}\,(g)$. Así, sólo falta ver que las evaluaciones de f y g coinciden. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = (x+2) = g(x)$$

Esta vez sí podemos realizar la simplificación del factor $(x-1)$ porque estamos suponiendo que $x \neq 1$. Así, en este contexto, las funciones f y g son iguales.

Funciones y resolución de ecuaciones

Consideremos el siguiente problema: Dada una función $f : A \to B$, y un elemento $y \in B$, queremos encontrar un $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Tomemos el ejemplo de la función $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$. Notemos que:

- Si $y < 0$, entonces no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$.
- Si $y = 0$, entonces hay una única solución: $x = 0$.
- Si $y > 0$, entonces hay dos soluciones: $x_1 = \sqrt{y}$ y $x_2 = -\sqrt{y}$.

Este ejemplo nos basta para darnos cuenta de que no siempre el problema que nos planteamos tiene solución, y en caso de tenerla, puede tener más de una.

En lo siguiente revisaremos propiedades que nos ayudarán a conocer cuándo este problema que nos planteamos, para una función $f : A \to B$ dada, posee soluciones para cualquier $y \in B$, y si estas soluciones son únicas.

Inyectividad

Una primera definición importante:

Inyectividad

Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es **inyectiva** si se cumple que

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \quad [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$$

O, equivalentemente, si se cumple que

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \quad [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$$

Inyectividad

Ejemplos

- Observemos que, entonces, la función $q(x) = x^2$, definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, **no** es inyectiva pues, tomando $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, se tiene que
$$x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$
- Un ejemplo de función que sí es inyectiva es el de la función $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $l(x) = ax + b$ con $a \neq 0$.

  Supongamos que existen un par de elementos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que
$$l(x_1) = l(x_2)$$
  Podemos, entonces, despejar del modo siguiente:
$$\begin{aligned} ax_1 + b &= ax_2 + b \\ ax_1 &= ax_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$
  El último paso lo obtenemos dividiendo por a, lo cual es válido pues sabemos que $a \neq 0$. O sea, probamos que
$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \quad l(x_1) = l(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
  es decir, que l es inyectiva.

Sobreyectividad

Sobreyectividad

Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es **sobreyectiva** si se cumple que

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) \quad y = f(x)$$

Algunos ejemplos:

Ejemplos

- La función $q(x) = x^2$, definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, *no* es sobreyectiva pues para el real $y = -1$ no existe ningún real x tal que $-1 = x^2$.
- Observemos, también, que la función $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que habíamos definido anteriormente sí es sobreyectiva.

  Sea $y \in \mathbb{R}$ arbitrario. Buscamos un $x \in \mathbb{R}$ de modo que $y = l(x)$.
  Si elegimos el real $x = \frac{y-b}{a}$ (recordemos que $a \neq 0$), entonces $l(x) = y$.

  Como el razonamiento que hicimos es válido para cualquier $y \in \mathbb{R}$, hemos demostrado que l es sobreyectiva.

Biyectividad

Biyectividad

Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Concluimos, entonces, que la función $q(x) = x^2$, definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, no es biyectiva. Por el contrario, la función $l(x) = ax + b$, definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, sí es biyectiva.

Proposición

Una función $f : A \to B$ es biyectiva si y sólo si

$$(\forall y \in B)(\exists! x \in A)\ y = f(x)$$

Demostración.

Observemos que la sobreyectividad de f equivale a la existencia de un $x \in A$ tal que $y = f(x)$ para cualquier $y \in B$.
Además, la unicidad del tal x equivale a la inyectividad de f. $\square$

Función Inversa

Dada una función $f : A \to B$, nos gustaría encontrar una función $g : B \to A$ correspondiente al "camino inverso" de f.

Es decir $g(y) = x$ cada vez que $f(x) = y$. Es fácil observar que debiéramos al menos pedir que f sea biyectiva para que una tal función g exista.

Como vemos en la figura (14), si f no fuera biyectiva, habría elementos de B a los cuáles no sabríamos asociarle un elemento de A.

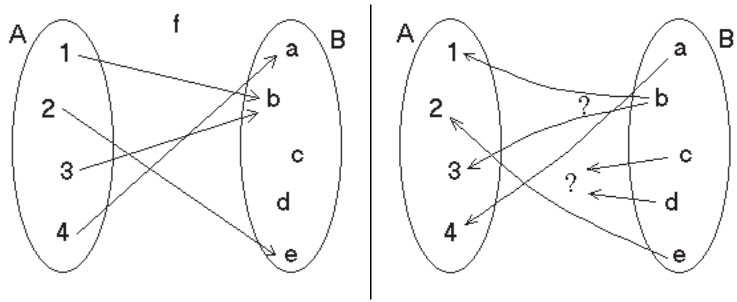

Figura: Dificultades para definir la inversa de una función no biyectiva.

Recordando que una función de A en B es en realidad un subconjunto de $A \times B$, podemos construir un 'candidato' a función g del siguiente modo:

> *Los elementos de $g \subseteq B \times A$ serán todos los pares ordenados $(b, a) \in B \times A$ tales que $(a, b) \in f$, es decir todos los pares ordenados (b, a) tales que $b = f(a)$.*

Función inversa

Ya vimos que esta construcción no siempre hace que g sea función. Sin embargo, tenemos la siguiente propiedad:

Propiedad

$$f \text{ es biyectiva} \iff g \text{ es función}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f \text{ es biyectiva} &\iff (\forall y \in B)(\exists! x \in A)\ f(x) = y \\ &\iff (\forall y \in B)(\exists! x \in A)\ (y, x) \in g \\ &\iff g \text{ es función} \end{aligned}$$

$\square$

A la función g que construimos de esta manera le llamaremos...

Función inversa

Dada f biyectiva, se define la función inversa de f, denotada f^{-1} por:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B) \quad f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

,

Función inversa

Para una función biyectiva $f : A \to B$, y su inversa $f^{-1} : B \to A$, tenemos las siguientes propiedades:

Propiedades

1. 1.1. $(\forall x \in A)\ f^{-1}(f(x)) = x$.
   1.2. $(\forall y \in B)\ f(f^{-1}(y)) = y$.
2. f^{-1} es biyectiva, y $(f^{-1})^{-1} = f$.

Demostración.

Demostraremos (1.2) y (2).
Para (1.2), consideremos $y \in B$ cualquiera. Si denotamos $x = f^{-1}(y)$, tenemos entonces que $f(x) = y$, gracias a la afirmación hecha anteriormente. Entonces

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

Para (2), llamemos $h = f^{-1}$, con lo que h es una función de B en A.
h es inyectiva: Sean $y_1, y_2 \in B$ tales que $h(y_1) = h(y_2)$. Como ambos elementos pertenecen a A, entonces podemos concluir que $f(h(y_1)) = f(h(y_2))$. Recordando que $h = f^{-1}$ y usando la propiedad (1.2) obtenemos que $y_1 = y_2$.
h es sobreyectiva: Sea $x \in A$ cualquiera. Buscamos $y \in B$ tal que $h(y) = x$. Basta tomar, entonces, $y = f(x)$, y así $h(y) = h(f(x))$. Recordando que $h = f^{-1}$ y utilizando la propiedad (1.1) obtenemos que $h(y) = x$.
Por lo tanto h es biyectiva, y tiene una función inversa h^{-1}. Ésta cumple que

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B) \quad h(y) = x \iff h^{-1}(x) = y$$

Continúa... □

Función inversa

Continuación demostración.

Sean $x \in A, y \in B$ tales que $h(y) = x$. Como $h = f^{-1}$, tenemos que

$$h(y) = x \iff f(x) = y$$

Así, para $x \in A$:

$$h^{-1}(x) = y \iff f(x) = y$$

Con esto se concluye que para cualquier $x \in A$, $h^{-1}(x) = f(x)$. Entonces

$$h^{-1} = f$$

o equivalentemente,

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

$\square$