Relaciones

28 de marzo de 2007

Introducción

Ya en los capítulos anteriores nos acercamos al concepto de relación.

Relación

Dados un par de conjuntos no vacíos A y B, llamaremos **relación binaria** entre A y B, o simplemente **relación** entre A y B, a un conjunto $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.
Denotaremos $a \mathcal{R} b$ cuando $(a,b) \in \mathcal{R}$, y $a \not\mathcal{R} b$ cuando $(a,b) \notin \mathcal{R}$.

Observemos que, para A y B conjuntos no vacíos, ya conocemos una buena cantidad de relaciones.

Por ejemplo, toda función $f : A \to B$ puede interpretarse como una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, donde $a \mathcal{R} b \iff b = f(a)$.

Ejemplos

1. Tomemos el conjunto $\mathcal{R} = \{(p,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : |p-n| \leq 5\}$. Éste es una relación entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$. Diremos que

   "*$\mathcal{R}$ es una relación entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ dada por* $(p \mathcal{R} n \iff |p-n| \leq 5)$"

2. $\leq$ es una relación de $\mathbb{R}$ consigo mismo, interpretando $\leq$ como el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y\}$.

3. En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, decimos que $a \mid b \iff (\exists k \in \mathbb{N})\ b = k \cdot a$. La relación que estamos simbolizando con la barra vertical $\mid$ se conoce como *divisibilidad*, y decimos que "a divide a b" cuando $a \mid b$. A modo de ejemplo, tenemos que $2 \mid 8$, $7 \mid 21$, $4 \nmid 5$ y $9 \nmid 28$.

4. Para $p, q \in \mathbb{Z}$, definimos la relación *igualdad módulo 3*, que simbolizaremos por $\equiv_3$, por $p \equiv_3 q \iff (\exists k \in \mathbb{Z})\ (p-q) = 3k$. Así, por ejemplo, $8 \equiv_3 11$ y $11 \equiv_3 -1$.

5. Sea P el conjunto de todos los seres humanos, y definimos para $p_1, p_2 \in P$ la relación $p_1 \mathcal{H} p_2 \iff p_1 \text{ es hermano o hermana de } p_2$.

Relaciones de un conjunto en sí mismo

A continuación nos preocuparemos de las relaciones de un conjunto no vacío A consigo mismo, es decir las relaciones $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Dada una relación $\mathcal{R}$ en el conjunto A, definimos las siguientes propiedades (al igual que con la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de funciones, estas propiedades pueden ser o no cumplidas por cada relación):

Tipos de relaciones

- Diremos que $\mathcal{R}$ es **refleja** si y sólo si
$$(\forall x \in A)\ x \mathcal{R} x$$
- Diremos que $\mathcal{R}$ es **simétrica** si y sólo si
$$(\forall x, y \in A)\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$$
- Diremos que $\mathcal{R}$ es **antisimétrica** si y sólo si
$$(\forall x, y \in A)\ (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$$
- Diremos que $\mathcal{R}$ es **transitiva** si y sólo si
$$(\forall x, y, z \in A)\ (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$$

Relaciones de un conjunto en sí mismo

Importante

Debemos observar que la simetría y la antisimetría no son propiedades contrapuestas:

Por un lado puede ocurrir que una relación no sea ni simétrica ni antisimétrica, pero también hay relaciones que cumplen ambas propiedades simultáneamente. Estas últimas, sin embargo, no pueden ser muy complejas, pues si $\mathcal{R} \subseteq A \times A$:

$$\mathcal{R} \text{ es simétrica y antisimétrica } \iff (\forall x, y \in A)\ [x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow x = y]$$

Demostración.

$\Leftarrow$) Queda como ejercicio para el lector.

$\Rightarrow$) Sean $x, y \in A$ tales que $x \,\mathcal{R}\, y$.
Como $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces también $y \,\mathcal{R}\, x$. Así,

$$x \,\mathcal{R}\, y \wedge y \,\mathcal{R}\, x$$

y como $\mathcal{R}$ es antisimétrica, concluimos que $x = y$. □

Observemos que si tenemos una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ tal que existen elementos $x_0 \neq y_0$ en A tales que $x_0 \,\mathcal{R}\, y_0$, entonces $\mathcal{R}$ es o bien simétrica, o bien antisimétrica.

Relaciones de un conjunto en sí mismo: Relaciones de orden

Relación de orden

Sea $\mathcal{R}$ una relación en el conjunto A. Diremos que $\mathcal{R}$ es una **relación de orden** en A, o simplemente que es un **orden en** A, si es una relación refleja, antisimétrica y transitiva.

- Si $\mathcal{R}$ es un orden en A, diremos que a **precede** a b cada vez que $a \mathcal{R} b$.
- Además, diremos que dos elementos $a, b \in A$ son **comparables** si se cumple que $(a \mathcal{R} b) \vee (b \mathcal{R} a)$.
- Si $\mathcal{R}$ es un orden que hace que todo par de elementos sea comparable, entonces diremos que $\mathcal{R}$ es un **orden total**. En caso contrario, diremos que es un **orden parcial**.

Es fácil verificar, entonces, que $\leq$ es un orden total en $\mathbb{R}$.

Relaciones de un conjunto en sí mismo: Relaciones de orden

Ejemplo: divisibilidad

Recordando la relación de divisibilidad $|$ que ya definimos, tenemos que ésta es un orden parcial en $\mathbb{N}$, pero no es un orden total.

Demostración.

Veamos que $|$ cumple las tres propiedades requeridas:

- $|$ es refleja pues para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n = 1 \cdot n$.
- Si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces existen $k, j \in \mathbb{N}$ tal que $b = ka$ y $a = jb$.
  Con esto, $b = kjb$, o equivalentemente $b(1 - kj) = 0$. De modo análogo, obtenemos que $a = jka$, y con ello $a(1 - jk) = 0$. Entonces
  $$a(1 - kj) = b(1 - kj)$$
  Si $kj \neq 1$, entonces podemos dividir por $(1 - kj)$ y concluir que $a = b$.

  Si $kj = 1$, como ambos son elementos de $\mathbb{N}$, tenemos que forzosamente $k = j = 1$ (se puede demostrar por contradicción, queda como ejercicio para el lector). Así, $a = jb = 1 \cdot b = b$.
  En cualquier caso $a = b$, con lo que $|$ resulta ser antisimétrica.
- Supongamos que $a \mid b$ y que $b \mid c$. Entonces, existen $k, j \in \mathbb{N}$ tales que $b = ka$ y $c = jb$. Así, $c = (j \cdot k)a$, por lo que $a \mid c$, y $|$ resulta ser transitiva también.

Concluimos que $|$ es un orden parcial. Finalmente, vemos que $|$ no es orden total pues, por ejemplo, 2 y 3 no son comparables: $2 \nmid 3$ y $3 \nmid 2$.

$\square$

Relaciones de un conjunto en sí mismo: Relaciones de equivalencia

Relación de equivalencia

Una relación $\mathcal{R}$ en el conjunto A se llamará **relación de equivalencia** si es

- Refleja.
- Simétrica.
- Transitiva.

Una relación de equivalencia en el fondo define un criterio de semejanza entre los elementos de A.

Por esto, consideraremos a continuación los subconjuntos formados por elementos “equivalentes” para la relación.

Clase de equivalencia

Dado un elemento $a \in A$, definimos la *clase de equivalencia de* a *asociada a* $\mathcal{R}$ como el conjunto

$$\{x \in A : a \, \mathcal{R} \, x\}$$

el cual denotaremos por $[a]_{\mathcal{R}}$.

Relaciones de un conjunto en sí mismo: Relaciones de equivalencia

Ejemplos

- Un ejemplo sencillo de relación de equivalencia es la igualdad entre números reales.
- Otro ejemplo lo podemos tomar del diccionario español: sea Σ el conjunto de todas las palabras del diccionario español.

  Para $v, w \in \Sigma$ definimos la relación $\approx$ como

  $$v \approx w \iff v \text{ y } w \text{ comienzan con la misma letra.}$$

  Es fácil ver que $\approx$ es una relación de equivalencia en Σ.

  Calculemos en este caso la clase de equivalencia de algunas palabras: la clase $[\text{hola}]_{\approx}$ es el conjunto de todas las palabras en Σ que comienzan con h, mientras que $[\text{casa}]_{\approx}$ es el conjunto de todas las palabras que comienzan con c.

  En este ejemplo, notemos que podemos escribir

  $$\Sigma = [\text{ahora}]_{\approx} \cup [\text{bote}]_{\approx} \cup [\text{casa}]_{\approx} \cup \ldots \cup [\text{zorro}]_{\approx}$$

  Además, se tiene que $[\text{tapa}]_{\approx} \cap [\text{velero}]_{\approx} = \emptyset$, y que $[\text{manzana}]_{\approx} = [\text{menos}]_{\approx}$.

Veremos que estas últimas propiedades se generalizan a cualquier relación de equivalencia.

Relaciones de un conjunto en sí mismo: Relaciones de equivalencia: Clases de equivalencia

Propiedades

Sean $x, y \in A$ y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida en A.

1. $[x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$
2. $x \mathcal{R} y \iff [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$
3. $x \not\mathcal{R} y \iff [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$
4. Como consecuencia de las anteriores, $[x]_{\mathcal{R}} \neq [y]_{\mathcal{R}} \iff [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$

Demostración.

Demostraremos (2) y (3).
Para (2):
$\Rightarrow$) Sea a un elemento.

$$\begin{array}{rcl} & a \in [x]_{\mathcal{R}} & \\ \iff & a \mathcal{R} x & \text{(def. de clase de equivalencia)} \\ \iff & a \mathcal{R} y & \text{(pues } x \mathcal{R} y\text{)} \\ \iff & a \in [y]_{\mathcal{R}} & \text{(def. de clase de equivalencia)} \end{array}$$

$\Leftarrow$) Notemos que $x \in [x]_{\mathcal{R}}$. Como $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$, concluimos que $x \in [y]_{\mathcal{R}}$. Por definición de clase de equivalencia, obtenemos que $x \mathcal{R} y$.
Para (3):
$\Rightarrow$) Por contrarrecíproca. Como $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, tenemos que existe $a \in [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}}$.
Como $a \in [x]_{\mathcal{R}}$, tenemos que $a \mathcal{R} x$. Análogamente, tenemos que $a \mathcal{R} y$. Como $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, en particular es transitiva, y entonces $x \mathcal{R} y$.
$\Leftarrow$) Por contrarrecíproca también. Si $x \mathcal{R} y$, tenemos que $x \in [y]_{\mathcal{R}}$. Como trivialmente $x \in [x]_{\mathcal{R}}$, entonces

$$x \in [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}}$$

por lo que $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.

$\square$

Relaciones de un conjunto en sí mismo: Relaciones de equivalencia: Conjunto cuociente

Conjunto cuociente

Al conjunto de todas las clases de equivalencia inducidas sobre A por una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ se le llama *conjunto cuociente*, y se denota $A/\mathcal{R}$. Éste es un conjunto cuyos elementos son clases de equivalencia, es decir:

$$C \in A/\mathcal{R} \iff (\exists x \in A)\ C = [x]_{\mathcal{R}}$$

Vimos que el conjunto de palabras Σ antes definido podía escribirse como unión de ciertas clases de equivalencia. Éstas eran conjuntos disjuntos entre sí, pues cada uno de ellos contenía a todas las palabras que comenzaban con una letra específica.

Esta noción que dice que un conjunto puede ser escrito como unión de otros conjuntos, todos ellos disjuntos, es la de partición.

Relaciones de un conjunto en sí mismo: Relaciones de equivalencia: Conjunto cuociente

Partición

Sea A un conjunto no vacío. Una colección de conjuntos $\{P_1, \ldots, P_n\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ se llamará **partición** de A si cumple:

- $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ P_i \neq \emptyset$
- $(\forall i, j \in \{1, \ldots, n\})\ i \neq j \Rightarrow P_i \cap P_j = \emptyset$
- $A = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \ldots \cup P_n$

Consideremos un conjunto no vacío A. Entonces toda relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida sobre A induce en él una partición, la cual está formada por todas las clases de equivalencia de los elementos de A.

También, toda partición $\{P_1, \ldots, P_n\}$ de A induce en él una relación de equivalencia $\mathcal{R}$, la cual está dada por

$$a \,\mathcal{R}\, b \iff (\exists i \in \{1, \ldots, n\})\ a \in P_i \wedge b \in P_i.$$

Ejemplo importante: Congruencia módulo p

Un tipo de relaciones de equivalencia de particular importancia lo conforman las llamadas relaciones **igualdad módulo** p, de las cuales ya conocemos la igualdad módulo 3.

Sea $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_p$ por

$$x \equiv_p y \iff (\exists k \in \mathbb{Z})\ (x - y) = kp$$

Si $x \equiv_p y$, diremos que x e y son **iguales módulo** p, o que son **congruentes módulo** p. Como ejemplo, tenemos que $13 \equiv_3 7$ pues $13 - 7 = 6 = 2 \cdot 3$, y que $12 \equiv_5 27$, pues $12 - 27 = -15 = -3 \cdot 5$.

Dado un $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $\equiv_p$ resulta ser una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$. Así, $\equiv_p$ induce en $\mathbb{Z}$ clases de equivalencia, y al conjunto cuociente $\mathbb{Z}/\equiv_p$ le llamaremos $\mathbb{Z}_p$.

Para trabajar con ella, se necesita el siguiente teorema, llamado teorema de la división euclidiana, que viene de la Teoría de Números:

Teorema

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Existe un único par $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = q \cdot b + r \quad \wedge \quad 0 \leq r < |b|$$

Se llama teorema de la división porque su aplicación a un par $a, b \in \mathbb{Z}$ equivale a calcular la división entera $a \div b$. Ésta debe tener un cuociente $q \in \mathbb{Z}$ y un resto $r \in \mathbb{Z}$, el cual debe ser menor que $|b|$.

Ejemplo importante: Congruencia módulo p

Propiedad

Se tiene que

$$\mathbb{Z}_p = \{[0]_p, [1]_p, \ldots, [p-1]_p\}$$

En particular, concluimos que $\mathbb{Z}_p$ tiene exactamente p elementos.

Demostración.

Demostraremos esta igualdad mediante dos inclusiones.
$\supseteq$) Recordemos que $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\equiv_p$, es decir que $\mathbb{Z}_p$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia $[\cdot]_p$ inducidas por $\equiv_p$ en $\mathbb{Z}$. Como

$$0, 1, \ldots, p-1 \in \mathbb{Z}$$

entonces por definición de conjunto cuociente

$$[0]_p, [1]_p, \ldots, [p-1]_p \in \mathbb{Z}_p$$

Continúa... $\square$

Ejemplo importante: Congruencia módulo p

Continuación demostración.

$\subseteq$) Sea $C \in \mathbb{Z}_p$. C es una clase de equivalencia, luego existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $C = [x]_p$.

Aplicando el teorema de la división, obtenemos que existen un cuociente $q \in \mathbb{Z}$ y un resto $r \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq r \leq p-1$) tales que

$$x = p \cdot q + r$$

de donde se concluye

$$x - r = p \cdot q$$

lo que significa que

$$x \equiv_p r$$

Gracias a una propiedad que demostramos anteriormente, esto nos dice

$$[x]_p = [r]_p$$

Por lo tanto $C = [r]_p$, y como $0 \leq r \leq p-1$, entonces

$$C \in \{[0]_p, [1]_p, \ldots, [p-1]_p\}$$

$\square$