Sumatorias

18 de abril de 2007

Sumas dobles

Veremos a continuación un caso particular de suma, en el que la que el término general a_k es a su vez una suma, para cada k.

Es decir, veremos cómo sumar sobre más de un índice.

Suma doble

Es una sumatoria del tipo

$$\sum_{k=0}^{n} b_k$$

en donde b_k es a su vez una sumatoria, o sea $b_k = \sum_{j=0}^{m} a_{k,j}$.
Reescribiendo:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{kj}.$$

Notar que:

- El término general a_{kj}, se denota así pues puede depender de ambos índices.
- Los límites inferior y superior de $\sum_{j=0}^{m} a_{k,j}$ puede depender del índice k.

Sumas dobles: Intercambio de sumas

En el caso en que los límites inferior y superior de b_k **no dependen de** k, podremos intercambiar el orden de las sumatorias.

Para ver esto, notemos que los términos que estamos sumando son:

$$\begin{array}{ccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{array}$$

y que por ende, la suma doble representa el sumar los resultados de sumar cada fila a la vez.

Es claro que esto es equivalente a sumar los resultados de sumar cada **columna** a la vez. De donde tenemos la siguiente propiedad:

Intercambio de sumas

Si tenemos una suma doble $\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}$, cuyos límites inferiores y superiores no dependen de los índices. Entonces:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{kj}.$$

Queda propuesto como ejercicio probar esta propiedad, usando inducción en $n \in \mathbb{N}$.

Sumas dobles

Un ejemplo importante es aquel en que:

$$a_{kj} = c_k d_j.$$

O sea, cuando el término general es la multiplicación de dos términos dependiendo independientemente cada índice. En este caso:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_k d_j \\
&= \sum_{k=0}^{n} c_k \left(\sum_{j=0}^{m} d_j\right) \qquad c_k \text{ es una constante para la segunda suma.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} c_k \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} d_j\right)}_{S}.
\end{aligned}$$

Y como la cantidad S es una constante para la suma sobre k, resulta:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_k d_j = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k\right)\left(\sum_{j=0}^{m} d_j\right)}$$

Sumas dobles

Ejemplo

Calcular $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} ij$.

Tenemos que, gracias a lo anterior:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} ij = (\sum_{i=0}^{n} i)(\sum_{j=0}^{m} j) = \frac{n(n+1)}{2}\frac{m(m+1)}{2}.$$

Ejemplo

Calcular $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} (i-j)^2$.

Acá tenemos la tentación de desarrollar $(i-j)^2 = i^2 + 2ij + j^2$ y ocupar sumas conocidas, además del resultado anterior.

Sin embargo, el límite superior de la segunda suma, depende de i por lo que no se puede recurrir a lo anterior.

Acá nos bastará notar qué valores posibles puede tomar $i-j$, para i fijo y j móvil.

Sumas dobles

Para $j = i$, $i - j = 0$ y crece a medida que decrece j, hasta $j = 0$ en donde vale $i - j = i$.
Por ende hacemos el cambio de índice en la primera sumatoria

$$k = i - j \quad \text{con} \quad k \in \{0, \ldots, i\}.$$

Esto resulta en:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} k^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}.$$

En donde esta última suma es perfectamente calculable y dicho cálculo queda de ejercicio.

Una última definición, que generaliza la noción anterior es la de:

Suma múltiple

Se trata de una suma:

$$\sum_{k_0=0}^{n_0} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{k_l=0}^{n_l} a_{k_0 k_1 \ldots k_l}.$$

Esta generalización también satisface:

Intercambio de sumas

Si los límites inferiores y superiores no dependen de los índices:

$$\sum_{k_0=0}^{n_0} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{k_l=0}^{n_l} a_{k_0 k_1 \ldots k_l} = \sum_{k_l=0}^{n_l} \sum_{k_{l-1}=0}^{n_{l-1}} \sum_{k_{l-2}=0}^{n_{l-2}} \cdots \sum_{k_0=0}^{n_0} a_{k_0 k_1 \ldots k_l}.$$

Y en general para cualquier reordenamiento de las sumas.

Cardinalidad

Habitualmente nos topamos con la necesidad de contar los elementos de un determinado conjunto. Tratamos así de establecer una correspondencia entre conjuntos y números naturales diciendo, por ejemplo, que $\{a, b, c\}$ tiene 3 elementos y que $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ tiene 7 elementos.

El problema de este enfoque típico es que no nos sirve para ciertos conjuntos, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$. De éstos sólo decimos que tienen una cantidad "infinita" de elementos.

La teoría de cardinalidad viene a establecer conceptos más precisos, que nos permitirán obtener resultados más poderosos que los sugeridos por la sola intuición. Esta teoría reemplaza la noción de "número de elementos" por la de "cardinal", así como la noción de "contar" por "establecer funciones biyectivas".

Consideremos $A = \{a, z, x, p, q, r, s\}$, el cual es un conjunto de 7 elementos, y el conjunto $\mathbb{N}_7 = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 7\}$. Es fácil construir una biyección entre A y $\mathbb{N}_7$, como por ejemplo la dada por el siguiente esquema.

$$\begin{array}{c}
\text{a} \longrightarrow 1 \\
\text{p} \longrightarrow 2 \\
\text{q} \longrightarrow 3 \\
\text{r} \longrightarrow 4 \\
\text{s} \longrightarrow 5 \\
\text{x} \longrightarrow 6 \\
\text{z} \longrightarrow 7
\end{array}$$

Así, reemplazaremos nuestra idea de "tener 7 elementos" por la idea equivalente que es "poder construir una biyección hacia $\mathbb{N}_7$". Lo importante de este nuevo enfoque es que nos permite eventualmente trabajar con conjuntos que tengan infinitos elementos.

Cardinalidad

Definamos esta nueva noción:

Cardinalidad

Dados A, B conjuntos no vacíos. Diremos que A y B **tienen el mismo cardinal** si existe una función $f : A \to B$ que sea biyectiva. En tal caso denotaremos $|A| = |B|$.

También, denotaremos $|A| \leq |B|$ cuando exista una función $f : A \to B$ que sea inyectiva.

Se tiene las siguientes propiedades básicas acerca de $|\cdot|$:

Propiedades

1. $|A| \leq |A|$
2. Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$
3. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, entonces $|A| \leq |C|$
4. $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \iff |A| = |B|$

Vale la pena hacer notar que la última propiedad es difícil de demostrar, escapándose del alcance de este curso.

Conjuntos finitos

Sea $n \in \mathbb{N}$ un natural cualquiera. Definimos el conjunto

$$\mathbb{N}_n = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n\}$$

(por ejemplo, tenemos así que $\mathbb{N}_0 = \emptyset$, $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$, y $\mathbb{N}_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$)

Dado un conjunto cualquiera E, diremos que es **finito** si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathbb{N}_k| = |E|$.
Así, podemos establecer las siguientes propiedades, las cuales se demuestran utilizando principio de inducción:

Propiedades

1. $|\mathbb{N}_{k+1}| \nleq |\mathbb{N}_k|$ (esto se nota $|\mathbb{N}_k| < |\mathbb{N}_{k+1}|$)
2. $m \leq n \iff |\mathbb{N}_m| \leq |\mathbb{N}_n|$

Gracias a ellas, denotaremos $|\mathbb{N}_k| = k$.
Cualquier conjunto que no sea finito, diremos que es **infinito**.

Propiedad

$\mathbb{N}$ es infinito.

Conjuntos finitos

Demostración.

Supongamos que $\mathbb{N}$ fuese finito. Entonces, existiría un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_k|$$

Además, sabemos que $\mathbb{N}_{k+1} \subseteq \mathbb{N}$, y por lo tanto

$$|\mathbb{N}_{k+1}| \leq |\mathbb{N}|$$

con lo que concluimos que

$$|\mathbb{N}_{k+1}| \leq |\mathbb{N}_k|$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Conjuntos numerables

Llamaremos conjunto **numerable** a cualquier conjunto que tenga la misma cardinalidad de $\mathbb{N}$.

Propiedad

$\mathbb{Z}$ es numerable.

Demostración.

Listemos ordenadamente los elementos de $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} \quad \ldots \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \ldots$$

y construiremos una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ simplemente asignando a cada natural un entero. Notemos que de esta forma estaremos **enumerando** los elementos de $\mathbb{Z}$, es decir iremos “contando” $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ en la medida que recorremos $\mathbb{Z}$. Una posible forma de hacerlo es la siguiente:

$\mathbb{Z}$	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$\mathbb{N}$	...	11	9	7	5	3	1	0	2	4	6	8	10	12	...

Observemos que ésta es una forma sencilla de construir una $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, que en nuestro caso posee una forma explícita:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{-(n+1)}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Queda como ejercicio para el lector demostrar que esta f es efectivamente biyectiva, con lo que se concluye que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, lo que buscábamos. $\square$

Conjuntos numerables

Es importante que nos detengamos en el siguiente punto: cuando construimos la asociación entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ mediante el diagrama

$\mathbb{Z}$	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$\mathbb{N}$	...	11	9	7	5	3	1	0	2	4	6	8	10	12	...

YA hemos establecido una función f de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, a pesar de que su forma explícita la damos después. A través del diagrama estamos dando el valor de $f(n)$ sólo para los naturales $n \leq 12$, sin embargo estamos dejando en claro la forma de calcular $f(n)$ para los naturales $n > 12$.

Por ejemplo, es claro gracias al proceso que seguimos, que $f(13) = -7$ y que $f(20) = 10$. Y para esto no hace falta conocer la forma explícita de la función f. Es más, veremos casos donde no es fácil mostrar explícitamente la función f que corresponda, por lo que no nos preocuparemos de ella. Simplemente mostraremos la enumeración que hay que hacer en cada caso.

Conjuntos numerables

Propiedad

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Demostración.

Para este caso, ordenaremos los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en una tabla de doble entrada:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	...
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	...
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	...
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...
4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	...
5	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Continúa... $\square$

Conjuntos numerables

Continuación demostración.

Y ahora, para enumerar $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, asociaremos a cada casilla de la tabla un número natural distinto:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
0	0	1	3	6	10	15	$\ldots$
1	2	4	7	11	16		$\ldots$
2	5	8	12	17			$\ldots$
3	9	13	18				$\ldots$
4	14	19					$\ldots$
5	20						$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

De esta manera hemos establecido un proceso que enumera $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, por lo que sabemos que hay una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, y así concluimos lo que deseábamos demostrar.

$\square$

Conjuntos infinitos

Propiedades

Sea A un conjunto infinito cualquiera. Entonces

1. Sea A un conjunto infinito. Entonces $|\mathbb{N}| \leq |A|$.
2. Sea A un conjunto infinito tal que $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Entonces $|A| = |\mathbb{N}|$.

Demostración.

Demostraremos (1).
Construiremos inductivamente una secuencia de elementos distintos $a_0, a_1, a_2, \ldots$ contenida en A.
Como A es infinito, en particular es no vacío. Sea, entonces, $a_0 \in A$.
El conjunto $A \setminus \{a_0\}$ debe ser también infinito, y en particular es no vacío también. Sea, entonces, $a_1 \in A \setminus \{a_0\}$.

Si hemos extraído de A los elementos $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tenemos que $A \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ es no vacío. Así, escogemos $a_{n+1} \in A \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Entonces $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \subseteq A$, y luego $|\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}| \leq |A|$.
Si consideramos $f : \mathbb{N} \to \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ dada por $f(n) = a_n$, como todos los a_k son distintos, tenemos que f es inyectiva. Así $|\mathbb{N}| \leq |\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}|$, con lo que concluimos el resultado.

$\square$

Uniones de cantidades infinitas de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, ya habíamos definido su unión $A \cup B$ diciendo que

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

Esta definición puede ser extendida para una cantidad finita de conjuntos $A_0, \ldots, A_n$ del modo siguiente

$$\begin{aligned} x \in A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n &\iff x \in A_0 \vee x \in A_1 \vee \ldots \vee x \in A_n \\ &\iff (\exists k \in \{0, 1, \ldots, n\})\ x \in A_k \end{aligned}$$

Pensemos ahora en una cantidad infinita de conjuntos. Más precisamente, pensemos que tenemos una colección numerable de conjuntos $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ que deseamos unir (notemos que al hablar de “colección numerable” nos referimos a que hay un conjunto A_k por cada número natural k, sin embargo cada conjunto A_k no necesariamente es numerable).

Para simplificarnos la escritura, denotaremos al conjunto unión $(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots)$ como

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

¿Cómo definir este conjunto unión? Extenderemos de forma muy sencilla la definición de una cantidad finita de conjuntos, así:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \iff (\exists k \in \mathbb{N})\ x \in A_k$$

Propiedades de conjuntos numerables

Propiedad

Sean A, B conjuntos numerables. Entonces $A \times B$ es numerable.

Demostración.

Como A y B son numerables, sabemos que existen funciones biyectivas

$$f : \mathbb{N} \to A \qquad g : \mathbb{N} \to B$$

Con éstas, construimos la función $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ dada por

$$\phi(i, j) = (f(i), g(j))$$

Queda propuesto al lector verificar que ϕ es también biyectiva. Concluimos entonces que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |A \times B|$, y como $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ se concluye que $A \times B$ es numerable.

$\square$

Propiedades de conjuntos numerables

Corolario

$\mathbb{Q}$ es numerable.

Demostración.

Como $\mathbb{Q}$ es un conjunto infinito, sabemos inmediatamente que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$. Basta demostrar entonces que $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$. Consideremos un elemento $x \in \mathbb{Q}$. Sabemos que se puede escribir de la forma $x = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, y donde p y q son primos relativos. Podemos entonces construir una función $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, de modo que $\Phi(x) = (p, q)$. Es decir:

Para $x \in \mathbb{Q}$, definimos $\Phi(x) = (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$,
donde p, q son primos relativos y $x = \frac{p}{q}$.

Es fácil demostrar que esta Φ es inyectiva, en efecto: sean $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$. Consideramos $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ y $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que

$$\Phi(x_1) = (p_1, q_1) \quad \wedge \quad \Phi(x_2) = (p_2, q_2)$$

Como $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$, se tiene que $p_1 = p_2$ y $q_1 = q_2$. Por definición de Φ, concluimos entonces que

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = x_2$$

Gracias a la inyectividad de Φ, obtenemos que $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})|$. Como tanto $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ son numerables, gracias a la propiedad para el producto cartesiano tenemos que $|\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})| = |\mathbb{N}|$. Así,

$$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}| \quad \wedge \quad |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$$

y entonces $\mathbb{Q}$ es numerable.

$\square$

Propiedades de conjuntos numerables

Propiedad

Sean $A_0, \ldots, A_n$ conjuntos numerables. Entonces $A_0 \times \ldots \times A_n$ es numerable.

Propiedad

Sea $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ una colección numerable de conjuntos, donde cada A_k es un conjunto numerable. Entonces su unión

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \text{ también es numerable}$$

Ejemplo: conjuntos infinitos

Sea A un conjunto infinito, y sea $x \in A$. Se tiene que $|A| = |A \setminus \{x\}|$.

Demostración.

Tal como hicimos en una demostración anterior, contruyamos un conjunto numerable

$$A' = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subseteq A$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x \notin A'$.
para definir la función $f : A \to A \setminus \{x\}$ dada por

$$(\forall a \in A) \quad f(a) = \begin{cases} a_0 & \text{si } a = x \\ a_{k+1} & \text{si } a \in A' \wedge a = a_k \\ a & \text{si } a \notin A' \wedge a \neq x \end{cases}$$

Esta f deja invariantes a todos los elementos que no pertenecen a $A' \cup \{x\}$, y a los elementos de este conjunto los traslada todos en una posición ($x \to a_0$, $a_k \to a_{k+1}$).
Notemos que, gracias a la definición de f: para $a \in A$,

- Si $f(a) = a_0$, entonces $a = x$.
- Si $f(a) \in A' \setminus \{a_0\}$, entonces $a \in A'$.
- Si $f(a) \notin A'$, entonces $a \notin A' \cup \{x\}$.

Con estas herramientas, queda propuesto al lector demostrar que f es biyectiva, con lo que se concluye la demostración.

$\square$