Control 1

P1. a (3,0 ptos.) Considere el siguiente sistema lineal a coeficientes reales,

$$\begin{array}{rrrrcl} -x_1 & & +\alpha x_3 & +\beta x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +\alpha x_3 & +\beta x_4 & = & 0 \\ \alpha x_1 & +\beta x_2 & & & = & 0 \\ \beta x_1 & +\beta x_2 & +\alpha x_3 & & = & 0 \end{array}$$

Determine las condiciones sobre los parámetros reales α y β que garanticen que el sistema tenga una única solución.

b) (3,0 ptos.) Sea A la matriz de coeficientes reales definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Demuestre que si la ecuación $Ax = 0$ tiene solución única, entonces $(a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$.

P2. i) (2,5 ptos.) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible tal que satisface la condición

$$A \cdot (A^2 + 3A + I) = 0.$$

Pruebe que $A^{-1} = -A - 3I$.

ii) Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible y tal que satisface $B^3 = 0$.

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se define $M(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ por

$$M(\lambda) = I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2.$$

ii)(1) (2,5 ptos.) Pruebe que

$$\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \quad M(\lambda + \beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$$

y deduzca que $M(\beta) \cdot M(\lambda) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

ii)(2) (1,0 pto.) Pruebe que $M(\lambda)$ es invertible y que $M(\lambda)^{-1} = M(-\lambda)$.

Indicación: Piense en $M(0)$.

Tiempo: 2:15 hrs.