Control 1

P1. (6,0 ptos.) Considere el sietma lineal siguiente donde α y β son parámetros reales.

$$\begin{array}{rrrrcr}
2x_1 & +x_2 & +(1-2\alpha)x_3 & +(\beta+1)x_4 & = & \beta-3 \\
 & x_2 & -x_3 & +(\beta-\alpha)x_4 & = & -1 \\
 & -2x_2 & +2x_3 & +(2-2\beta)x_4 & = & -2 \\
2x_1 & & +2x_3 & +\alpha x_4 & = & 4\beta-3 \\
2x_1 & +x_2 & +x_3 & +(\alpha+\beta-1)x_4 & = & 0
\end{array}$$

Determine condiciones sobre α y β para que el sistema:

(i) Tenga infinitas soluciones.

(ii) Tenga solución única.

(iii) No tenga solución.

P2. a) (3,0 ptos.) Sea $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $M^tM \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible. Se define la matriz $P \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ como

$$P = I - M(M^tM)^{-1}M^t,$$

donde I es la identidad de dimensión m.

Pruebe que

a.1) $P^2 = P$ y $P \cdot M = 0$, donde 0 es la matriz nula de dimensión m.

a.2) Las matrices M^tM y P son simétricas.

a.3) P no es invertible (Ind: Argumente que M no es nula).

b) (3,0 ptos.) Considere el plano

$$\Pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s,t \in \mathbb{R}$$

y la recta

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

donde a y c son parámetros.

Encuentre condiciones sobre los parámetros a y c para que $\Pi \cap L \neq \phi$. ¿Existe algún caso en que $\Pi \cap L = L$?

Justifique cada una de sus respuestas
Tiempo: 2:30 hrs.