Control 2

P1. **(a)** Sea $T : M_{23}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ tal que

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(i) (1 pto) Demostrar que T es lineal.

(ii) (1 pto) Encontrar bases y dimensión de Ker T e Im T.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, lineal, tal que

$$\text{Ker } f = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \qquad \text{y} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) (1 pto) Indicar (justificando) dim Ker f y una base del mismo.

(ii) (1 pto) Encuentre $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, para todo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

(iii) (1 pto) Encuentre una base de Im f.

(iv) (1 pto) Es f inyectiva? Epiyectiva?

P2. En el siguiente problema $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ denota el espacio vectorial de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 3. Considere el subespacio vectorial $U = \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) / p(1) = p'(1) = 0\}$

(a) (1.5 pto) Encuentre una base de U y su dimensión.

(b) (1.5 pto) Extienda la base de la parte anterior a una base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

(c) Considere ahora el subespacio vectorial $W = \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) / p''(0) = 0\}$.

(i) (1 pto) Encuentre una base de W y su dimensión.

(ii) (1 pto) Encuentre una base $U \cap W$ y su dimension.

(iii) (1 pto) Pruebe que $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = U + W$.

P3. Sean $[a, b)$ un intervalo contenido en el intervalo $[0, n)$ con $a, b, n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{1}_{[a,b)}(x)$ la función indicatriz de $[a, b)$:

$$\mathbb{1}_{[a,b)}(x) := \begin{cases} 1, & si\ x \in [a, b) \\ 0, & si\ x \notin [a, b) \end{cases}$$

Sea $\mathcal{F}([0, n), \mathbb{R})$ el e.v. de las funciones del intervalo $[0, n)$ en $\mathbb{R}$. Definimos el conjunto $F \subseteq \mathcal{F}([0, n), \mathbb{R})$ de las funciones constantes por pedazos de largos enteros, es decir,

$$f \in F \Leftrightarrow \forall\ 1 \le i \le n, \exists \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall x \in [0, n),\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1,i)}(x)$$

(a) (1 pto) Sea $[a, b)$ un intervalo con $a, b \in \mathbb{N}$ y $a < b < n$. Pruebe que $\mathbb{1}_{[a,b)} \in F$.

(b) (1 pto) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante y $f \in F$. Pruebe que $g = \alpha f \in F$.

(c) (1 pto) Pruebe F es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}([0, n), \mathbb{R})$.

(d) (1 pto) Pruebe que el conjunto de funciones $B := \{\mathbb{1}_{[0,1)}, \mathbb{1}_{[1,2)}, \ldots, \mathbb{1}_{[n-1,n)}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

(e) (1 pto) Encuentre una base de F.

(f) (1 pto) Encuentre un isomorfismo(transformación lineal biyectiva) $T : F \to \mathbb{R}^n$ y calcule $T(\mathbb{1}_{[a,b)})$.