Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1B2 Álgebra Lineal 08-2

Control 2

P1. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 con coeficientes reales, y las operaciones usuales de suma y producto de matriz por escalar. Se definen

$$W_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \middle| a + d = 0 \right\} \text{ y } W_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} -x & y \\ x & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) (1,5 ptos.) Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V.

(ii) (2,0 ptos.) Encuentre bases para W_1 y W_2 indicando las respectivas dimensiones de cada subespacio.

(iii) (1,5 ptos.) Encuentre una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$.

(iv) (1,0 ptos.) Complete una base de W_1 para obtener una base de V. Justifique.

P2. Considere el conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^4$ dado por

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y $\quad T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal que satisface las condiciones siguientes:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T).$$

(i) (0,5 ptos.) Pruebe que B es base de $\mathbb{R}^4$.

(ii) (1,5 ptos.) Demuestre que una base de $\mathrm{Ker}(T)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(iii) (2,0 ptos.) Calcule la matriz representante de T cuando se ocupa B como base en la partida y en la llegada.

(iv) (2,0 ptos.) Calcule la matriz representante de T cuando se ocupa la base canónica en la partida y en la llegada.

P3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$.

a) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal que satisface que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$. Demuestre que:

a.1) (1,5 ptos.) $T \circ T = 0$.

a.2) (1,5 ptos.) n es par y el rango de T es $\frac{n}{2}$.

b) Sea $F : V \to V$ una transformación lineal que satisface que $F \circ F = 0$. Demuestre que:

b.1) (1,5 ptos.) $\mathrm{Im}(F) \subseteq \mathrm{Ker}(F)$.

b.2) (1,5 ptos.) Si n es par y el rango de F es $\frac{n}{2}$, entonces $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Ker}(F)$.

25 de octubre de 2008
Tiempo: 3:00 hrs.
Consultas sólo de enunciado, sólo al auxiliar, en voz alta y desde el puesto