Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 09-2

Control 2

P1. Sea V un espacio vectorial con base $B = \{u, v, w\}$ y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que

$$T(u) = v - w; \quad T(v) = u + v; \quad T(w) = u + 2v - w.$$

a) (2,0 ptos.) Determine la matriz representante de T, $M_{BB}(T)$, con respecto a las bases B y B.

b) (4,0 ptos.) Sea L el subespacio vectorial de V generado por el vector $x = 2u + 3v - w$. Encuentre los siguientes subespacios y sus dimensiones:

b.1) $T(L)$; b.2) $L \cap \ker(T)$; b.3) $L + \ker(T)$; b.4) $\mathrm{Im}(T)$.

P2. Denotemos por $P_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 3. Considere las bases $B_1 = \{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, 1 - x^2 + 2x^3, 3x - x^3, 2 + 5x + 2x^2 - 4x^3\}$ de $P_3(\mathbb{R})$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$. Sean $f : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos transformaciones lineales tales que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz representante de la función f con respecto a las bases B_1 en $P_3(\mathbb{R})$ y B_2 en $\mathbb{R}^3$ y $g(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}$, $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(i) (2,0 ptos.) Encuentre la matriz representante B de la función g con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

(ii) (4,0 pto.) Obtenga la matriz representante de $g \circ f$ (g compuesta con f) con respecto a la base B_1 en $P_3(\mathbb{R})$ y la base canónica en $\mathbb{R}^2$.

P3. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal donde V es un espacio vectorial de dimensión finita n.

a) Sea $T^k = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{k \text{ veces}}$ para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(i) (1,0 pto.) Demuestre que $\ker(T^k) \subseteq \ker(T^{k+1})$.

(ii) (0,5 ptos.) Demuestre que $T^{k+1}(V) \subseteq T^k(V)$.

(iii) (0,5 pto.) Demuestre que $\dim(T^{k+1}(V)) \leq \dim(T^k(V))$.

b) (2,0 ptos.) Suponga que existe $k_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $T^{k_0+1}(V) = T^{k_0}(V)$. Pruebe que $T^{k_0}(V) = T^k(V)$, $\forall k \geq k_0$.

c) (1,0 ptos.) Demuestre que el k_0 del punto b) existe.

d) (1,0 ptos.) Sea $U = T^n(V)$. Pruebe que

$$\begin{aligned} S : U &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto S(x) = T(x) \end{aligned}$$

es un isomorfismo

24 de octubre de 2009
Sin consultas
Tiempo: 3:00