Control 2

P1. (6,0 ptos.) Sea Π un plano y $L \subseteq \Pi$ una recta y sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera. Denotamos por R a la proyección ortogonal de P sobre el plano Π y Q a la proyección ortogonal de P sobre la recta L.

Demuestre que si $R \neq Q$, entonces la recta que pasa por los puntos R y Q es perpendicular a la recta L.

P2. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y W definido por

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) |\ A \text{ es simétrica y } \sum_{i=0}^{n} a_{ii} = 0\}.$$

a) (2,0 ptos.) Probar que W es s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

b) (4,0 ptos.) Considere $n = 3$ y las siguientes matrices de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pruebe que $W = \langle \{A, B, C, D, E\} \rangle$.

P3. a) (2,0 ptos.) Considere el espacio vectorial $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$. Se define

$$W_a = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) |\ \text{Traza}(A) = a\}$$

donde

$$\text{Traza}(A) = \sum_{i=0}^{n} a_{ii} \text{ (la suma de los elementos de la diagonal de } A\text{)}.$$

Pruebe que W_a es s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ si y sólo si $a = 0$.

b) (2,0 ptos.) Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que n. Sean $p, q \in \mathcal{P}_n$ tales que $\{p, q\}$ es l.i. Demuestre que $\{p, q, p \cdot q\}$ es l.i. si y sólo si grado$(p) \geq 1$ y grado$(q) \geq 1$.

c) (2,0 ptos.) Sean U, W dos s.e.v. de un e.v. V tales que $\dim(V) = 3$ y $\dim(U) = \dim(W) = 2$, con $U \neq W$. Demuestre que $\dim(U \cap W) = 1$.

Justifique cada una de sus respuestas
Tiempo: 3:00 hrs.