Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 08-1

Control 3

P1. **(a)** Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \\ 10 & -10 & 11 \end{pmatrix}$$

.

(i) (1.5 ptos.) Calcule el polinomio característico de A, los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas.

(ii) (2.0 ptos.) Determine los espacios propios asociados a cada valor propio y calcule las multiplicidades geométricas de cada valor propio.

(iii) (0.5 ptos.) Concluya que A es diagonalizable y explicite las matrices P y D.

(b) (2.0 ptos.) Sea $A = PDP^{-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ con D diagonal y P invertible. Suponga que 1 y -1 NO son valores propios de A. Demuestre que para todo $k \in \mathbb{N}$ la matriz

$$B = I + A + \ldots + A^k = I + \sum_{i=1}^{k} A^i$$

es invertible y determine explícitamente la inversa de B.

P2. **(a)** Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2, y $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal tal que para todo polinomio $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se tiene que $(T(p))(x) = p(1+x)$.

(i) (2.0 ptos.) Calcule la matriz representante de T con respecto a la base canónica $A = \{1, x, x^2\}$ en el espacio de partida y de llegada.

(ii) (2.0 ptos.) Calcule usando matriz cambio de base la matriz representante de T con respecto a la base $B = \{1+x, 1-x, 1+x+x^2\}$ en el espacio de partida y de llegada.

(b) (2.0 ptos.) Sea V un espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Sea $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ la base ortonormal obtenida al aplicar el método de Gram-Schmidt a B en el orden dado por los subíndices. Pruebe que la matriz de cambio de base de B' a B es triangular superior.

P3. Sean W y B dos s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ y $P : \mathbb{R}^n \to W$ la proyección ortogonal sobre W.

(a) (1.5 ptos.) Muestre que $P(B) = \{P(x) : x \in B\}$ es un s.e.v. de W y que si $\{b_1, \ldots, b_k\}$ es un generador de B entonces $\{P(b_1), \ldots, P(b_k)\}$ es un generador de $P(B)$.

(b) Si $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$:

(I) (1.5 ptos.) Encuentre una base ortonormal de W y explicite su dimensión.

(II) (1.5 ptos.) Encuentre una base ortonormal de $W^{\perp}$ y explicite su dimensión.

(III) (1.5 ptos.) Encuentre una base de $P(B)$ y explicite su dimensión.

20 de Junio de 2008
Sin consultas
Tiempo: 3:00