Control 3

P1. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(i) (1,0 ptos.) Determine los valores de α, β y γ sabiendo que $\lambda = 3$ es un valor propio de A y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es su vector propio asociado.

(ii) (5,0 ptos.) Incorporando los valores determinados en (i) para α, β y γ, demuestre que A es diagonalizable y calcule P invertible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.

P2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ se sabe que $\lambda = 3$ y $\lambda = -3$ son sus únicos valores propios.

(i) (4,0 ptos.) Encuentre una base ortonormal de vectores propios de A.

(ii) (2,0 ptos.) Determine el polinomio característico de A.

P3.

a) (1,5 ptos.) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A es invertible, muestre que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

b) (1,5 ptos.) Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable, pruebe que si A tiene sólo un valor propio, entonces $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) (1,5 ptos.) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable y tal que $\exists k \in \mathbb{N}$, $A^k = 0$. Demuestre que $A = 0$.

d) (1,5 ptos.) Para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal, pruebe que A^T es diagonalizable y que las columnas de $(P^T)^{-1}$ forman una base de vectores propios de A^T.

22 de noviembre de 2008
Tiempo: 3:00 hrs.
Consultas sólo de enunciado, sólo al auxiliar, en voz alta y desde el puesto