# Control 3

**P1.** Considere el conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^4$ dado por $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal que satisface las condiciones siguientes:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \ker(T) = \mathrm{Im}(T).$$

(i) (0,5 ptos.) Pruebe que $B$ es base de $\mathbb{R}^4$.

(ii) (1,5 ptos.) Demuestre que una base de $\ker(T)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(iii) (2,0 ptos.) Calcule la matriz representante de $T$ cuando se ocupa $B$ como base en la partida y en la llegada.

(iv) (2,0 ptos.) Calcule la matriz representante de $T$ cuando se ocupa la base canónica en la partida y en la llegada.

**P2.** Sea $\Pi$ el plano en $\mathbb{R}^3$ de ecuación caractesiana $\Pi : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función definida por $T(x) =$ "simétrico de $x$ con respecto a $\Pi$".

(i) (1,5 ptos.) Demuestre que $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) (1,5 ptos.) Muestre que $T$ es lineal.

(iii) (1,5 ptos.) Sea $A$ la matriz representante de la transformación $T$ con respecto a las bases canónicas. Calcule $A$.

(iv) (1,5 ptos.) Demuestre que el polinomio característico de $A$ es $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. Pruebe que $A$ es diagonalizable y encuentre $P$ invertible y $D$ diagonal tal que

$$A = PDP^{-1}.$$

**P3.** Sea $m = 2n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y considere $\mathcal{P}_m(x)$ el conjunto de todos los polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$, de grado menor o igual que $m$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Se define el conjunto

$$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_m(x) | i \in \{0, \ldots, m\}, a_i = a_{m-i}\}.$$

(i) (1,5 ptos.) Probar que $V$ es subespacio vectorial de $\mathcal{P}_m(x)$ sobre $\mathbb{R}$.

(ii) (1,5 ptos.) Encontrar una base de $V$ y deduzca que su dimensión es $n + 1$.

(iii) (1,5 ptos.) Probar que $\mathcal{P}_m(x) = V \oplus P_{n-1}(x)$.

(iv) (1,5 ptos.) Se define

$$V' = \{p(x) \in \mathcal{P}_m(x) | i \in \{0, \ldots, m\}, a_i = -a_{m-i}\}.$$

Probar que $\mathcal{P}_m(x) = V \oplus V'$ asumiendo que $V'$ es subespacio vectorial de $\mathcal{P}_m(x)$.

Tiempo: 3:00 hrs.