Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 12-2

Control 3

P1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Considere la función

$$\begin{aligned} T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(i) (1,0 pto.) Demuestre que T es una función lineal.

(ii) (3,0 ptos.) Determine los subespacios $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ y encuentre una base y la dimensión de cada uno.

(iii) (2,0 ptos.) Encuentre M matriz representante de T con respecto a la base canónica

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

en el espacio de partida y de llegada.

P2. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para cada una de ellas se pide lo siguiente:

(i) (4,5 ptos.) Calcular valores y vectores propios.

(ii) (1,5 ptos.) Decidir si es o no diagonalizable. Fundamente.
En caso de ser diagonalizable encuentre una matriz P invertible y una matriz D diagonal tales que la matriz se escriba como PDP^{-1}.

P3. (i) (3,0 ptos.) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función lineal tal que $T \circ T = T$. Pruebe que $\mathbb{R}^n = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

(ii) (1,5 ptos.) Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tiene sólo un valor propio igual a 1 y es diagonalizable, entonces $A = I$.

(iii) (1,5 ptos.) Sean $A \in \mathcal{M}_{4,7}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{7,4}(\mathbb{R})$. Muestre que $B \cdot A$ **no puede** ser la identidad $I \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$.

Justifique cada una de sus respuestas
Tiempo: 3:00 hrs.