Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 11-2

EXAMEN

P1. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \alpha \\ 2 & -1 & \beta \\ -1 & 2 & \gamma \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(i) (1,0 pto.) Determine los valores de α, β y γ sabiendo que $\lambda = -3$ es un valor propio de A con $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vector propio asociado a λ.

(ii) (2,0 pto.) Incorporando los valores determinados en (i) para α, β y γ, demuestre que A es diagonalizable y que su polinomio característico es

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27.$$

(iii) (3,0 ptos.) Calcule P invertible, D diagonal y P^{-1} de modo que $A = PDP^{-1}$.

P2. a) Considere la función $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 + a_3 \\ 2a_0 + 2a_1 + a_2 + a_3 & a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}.$$

(i) (1,0 pto.) Demuestre que T es una transformación lineal.

(ii) (3,5 ptos.) Determine bases y dimensiones de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

b) (1,5 ptos.) Demuestre que si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es lineal, entonces, o bien $L = 0$ (transformación idénticamente nula) o bien $\dim(\ker(L)) = n - 1$.

P3. Sean $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos transformaciones lineales. Considere el subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4 : \quad w_3 = T_1(w_1, w_2), w_4 = T_2(w_1, w_2)\}.$$

(i) (2,0 ptos.) Pruebe que W es s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

(ii) (2,0 ptos.) Pruebe que $P : W \to \mathbb{R}^2$ definida por $P(w_1, w_2, w_3, w_4) = (w_1, w_2)$ es un isomorfismo, es decir es lineal y biyectiva. Calcule además la dimensión de W.

(iii) (2,0 ptos.) Muestre que $\mathcal{U} = \{(0, 0, x_3, x_4) : (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\}$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ y que

$$\beta = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

es base de $\mathcal{U}$. ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{U}$? Concluya que $W \oplus \mathcal{U} = \mathbb{R}^4$.

Tiempo: 3:00 hrs.