EXAMEN

P1. Sea

$$S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

a) (1,0 pto.) Encuentre una base de S.

b) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que $\ker(T) = S$ y

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \; T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

b1) (2,5 ptos.) Determine la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$ y encuentre una base de $\mathrm{Im}(T)$.

b2) (2,5 ptos.) Determine explícitamente T, es decir dé una fórmula para $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

P2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

se sabe que $\lambda = 3$ y $\lambda = -3$ son sus únicos valores propios.

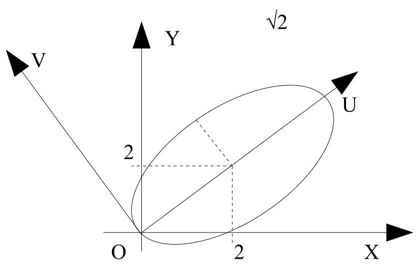
(i) (4,0 ptos.) Encuentre una base ortonormal de vectores propios de A.

(ii) (2,0 ptos.) Determine el polinomio característico de A.

P3. a) La elipse de la figura pasa por el origen O y su semieje menor mide $\sqrt{2}$.

(i) (1,0 pto.) Escriba la ecuación de la elipse en función de las variables u y v, asociadas a los ejes U y V.

(ii) (3,0 ptos.) Encuentre la ecuación de la elipse en las variables x, y del sistema XOY.



b) (i) (1,0 pto.) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, simétrica, cuyos únicos valores propios son 2 y -2. Demuestre que $A + 3I$ es definida positiva.

(i) (1,0 pto.) Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, simétrica, definida positiva y sea $\lambda_1 > 0$, su menor valor propio. Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; x^t B x \geq \lambda_1 x^t x.$$

Indicación: Considere $B - \lambda_1 I$.

Justifique cada una de sus respuestas
Tiempo: 3:00 hrs.