Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 09-2

Pauta Control 1

P1.

(i) Escalonando la matriz aumentada asociada al sistema se tiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & \alpha(1+\beta) & \beta & \beta^2 & \beta \\ 0 & \alpha^2 & \beta & \alpha\beta & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & -\beta & \beta-\alpha(1+\beta) \\ 0 & 0 & \beta-\alpha & 0 & -\alpha^2 \end{array}\right) \text{[1,0]}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\alpha & -\beta & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & -\beta & \beta-\alpha(1+\beta) \\ 0 & 0 & 0 & -\beta(\beta-\alpha) & -\alpha^2+(\beta-\alpha)(\beta-\alpha-\alpha\beta) \end{array}\right) \text{[1,0]}$$

Entonces,

- Si $\alpha = \beta$ y $\alpha \neq 0$ no existe solución pués en la fila 4 se produce una igualdad imposible $(0 = -\alpha^2 \neq 0)$.
- Si $\alpha = \beta = 0$ existen infinitas soluciones pues en la última fila se producen sólo ceros. [1,0]
- Si $\alpha \neq \beta$ y $\beta = 0$ también existen infinitas soluciones pues nuevamente se producen sólo ceros en la última fila.
- Si $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = 0$ existen infinitas soluciones pues las filas 2 y 3 quedan incompatibles. [1,5]
- Por último si $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ la solución es única. [0,5]

En resumen,

1) El sistema tiene infinitas soluciones si $\alpha = \beta = 0$ o cuando $\alpha \neq \beta$ y $\beta = 0$ o cuando $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = 0$.
2) El sistema no tiene solución si $\alpha = \beta$ y $\alpha = 0$.
3) El sistema tiene solución única si $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

(ii) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ se tiene que $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ por lo que existe solución única. La matriz ampliada queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ -x_3 - 2 &= -1 \Rightarrow x_3 = -1 \\ x_2 - 1 + 2 &= 1 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_1 - 0 + 0 - 2 &= 0 \Rightarrow x_1 = 2 \end{aligned}$$

Así la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [1{,}0]$$

P2. a) Las rectas L_1 y L_2 están definidas por

$$L_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(i) Para demostrar que $L_1 \cap L_2 = \phi$ bastará probar que el sistema para L_1 y L_2 no tiene solución. Así

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$$

Reemplazando en L_2 queda

$$\begin{aligned} x - z - 1 = t - t - 1 = 0 &\Rightarrow -1 = 0 \\ y + z - 2 = 1 + t + t - 2 = 0 &\Rightarrow t = 1/2 \end{aligned}$$

donde el primer resultado es una contradicción. Se sigue que $L_1 \cap L_2 = \phi$. [1,0]
Observación: También puede escribirse la ecuación vectorial para L_2 y probar que el sistema que resulta para L_1 y L_2 no tiene solución.

(ii) El plano Π pedido debe contener a L_1 y ser paralelo a L_2. Entonces como posición podemos usar $P : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in L_1 \subseteq \Pi$ y como vectores directores $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de L_1 y d_2 de L_2 donde d_2 puede determinarse como $d_2 = n_1 \times n_2$ en que n_1 y n_2 son los vectores directores de los planos que determinan L_2. Así

$$n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ \text{y} \ n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\Pi : P + \lambda d_1 + \mu d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [1{,}0]$$

y su ecuación cartesiana se deduce de

$$\begin{aligned} x &= \lambda + \mu \\ y &= 1 + \lambda - \mu \\ z &= \lambda + \mu \end{aligned}$$

de donde la ecuación cartesiana pedida será

$$\Pi : x - z = 0. \ [0{,}5]$$

(iii) La distancia entre L_1 y L_2 es la misma que entre cualquier punto de L_2 y el plano Π. Tomando, por ejemplo $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in L_2$ y $\Pi : x - z = 0$.

$$\text{dist}(Q, \Pi) = \frac{|x_Q - z_Q|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|1-0|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ [1,5]}$$

donde se usó que la distancia de un punto $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ a un plano $\Pi : Ax + By + Cz = 0$ es $\text{dist}(Q, \Pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^1+B^2+C^2}}$.

Observación: Alternativamente la distancia se puede calcular tomando un punto $P \in L_1$ y otro $Q \in L_2$ y proyectar $\bar{PQ}$ según el vector unitario de Π.
Así la distancia entre L_1 y L_2 es $\left| \langle Q - P, \frac{n}{\|n\|} \rangle \right|$.

b) $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

$$A^p \text{ es invertible } \Leftrightarrow A \text{ es invertible}$$

$\Rightarrow$) A^p es invertible, entonces $\exists B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $BA^p = I$, entonces

$$BA^{p-1}A = I \Rightarrow (BA^{p-1})A = I$$

Entonces A es invertible y su inversa es BA^{p-1} tal que

$$(BA^{p-1})A = A(BA^{p-1}) = I. \text{ [1,5]}$$

$\Leftarrow$) Basta recordar que el producto de matrices invertible es invertible, con lo que $A^p = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{p \text{ veces}}$ es invertible. [0,5]

P3.

a) $W = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) / A \text{ es simétrica y } \sum_{i=0}^{n} a_{ii} = 0\}$.. W es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}$ si $(\forall \lambda\mu \in \mathbb{R})(\forall A, B \in W)$

$$(\lambda A + \mu B) \in W.$$

Primero debemos probar que si A y B son simétricas, entonces $(\lambda A + \mu B)$ es simétrica, es decir, debe probarse que

$$(\lambda A + \mu B)^T = (\lambda A + \mu B)$$

donde $A^T = A$ y $B^t = B$.
En efecto

$$(\lambda A + \mu B)^T = (\lambda A)^T + (\mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = (\lambda A + \mu B). \text{ [1,5]}$$

Además, para $A, B \in W$, $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$. Claramente $(\lambda A + \mu B)$ satisface las dos condiciones de W y por lo tanto

$$(\lambda A + \mu B) \in W \Rightarrow W \text{ es un s.e.v. de } \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}). \text{ [0,5]}$$

b) Las matrices de $W \subseteq \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ $(n = 3)$ son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b.1) Se deb probar que $\{A, B, C, D, E\}$ es l.i. es decir, si

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D + \lambda_5 E = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0$

En efecto

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtienen, para cada componente, las ecuaciones o resultados siguientes

$$\lambda_4 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_5 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0$$

y $-\lambda_4 - \lambda_5 = 0$ de donde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. [1,0]

b.2) Se debe probar que $W = \langle\{A, B, C, D, E\}\rangle$, es decir, para toda matriz $S \in W$ existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ tales que

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D + \lambda_5 E = S$$

donde S se puede escribir como $S = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & -a-b \end{pmatrix}$ que cumple con ser simétrica y de traza nula ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ cualquiera). [1,0]

Sigue que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & -a-b \end{pmatrix}$$

de donde la resolución es inmediata y se obtiene

$$\begin{aligned} &\lambda_4 = a, \quad \lambda_1 = c, \quad \lambda_2 = d \\ &\lambda_1 = c, \quad \lambda_5 = b, \quad \lambda_3 = e \\ &\lambda_2 = d, \quad \lambda_3 = e, \quad \lambda_4 + \lambda_5 = a + b \end{aligned}$$

Así hemos probado que $\forall S \in W, \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^{5} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$S = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D + \lambda_5 E. \text{ [1,0]}$$