Pauta Problema 1 (ALG-LINEAL N°1)

Escalonando la matriz aumentada asociada al sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2-2\beta & -2 \\ 2 & 0 & 2 & \alpha & 4\beta-3 \\ 2 & 1 & 1 & \alpha+\beta-1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2-2\beta & -2 \\ 0 & -1 & 2\alpha+1 & \alpha-\beta-1 & 3\beta \\ 0 & 0 & 2\alpha & \alpha-2 & 3-\beta \end{array}\right) \begin{array}{l} E_{2,3}(2,1) \\ E_{2,4}(1,1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 3\beta-1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & \alpha-2 & 3-\beta \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Permutando 3 con 4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 3\beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & 2\alpha & \alpha-2 & 3-\beta \end{array}\right) E_{3,5}(-1,1)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 3\beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha-1) & 4-4\beta \end{array}\right) E_{4,5}(1,2) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 3\beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4(1-2\beta) \end{array}\right)$$

$\longrightarrow$ (2.0 ptos)

Si en la última fila, $1-2\beta\neq 0$, no hay solución, independiente del valor de $\alpha\in\mathbb{R}$. Entonces si $\beta\neq 1/2$ NO HAY SOLUCION.

$\longrightarrow$ (0.5 ptos)

Para $\beta=\frac{1}{2}$ debemos estudiar los valores de α.

i) Si $\alpha=1$, entonces en la cuarta fila se produce $0=-4$, igualdad imposible que indica que NO HAY SOLUCION, aun cuando $\beta=1/2$ $\longrightarrow$ (0.5 ptos)

ii) Si $\alpha=0$ se puede pivotear una vez más para concluir que no hay solución o deducir que de la fila 3, $x_4=-1/2$ y de la fila 4, $x_4=-2$, contradicción evidente. $\longrightarrow$ (1.0 ptos)

iii) Si $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ con $\beta = 1/2$, entonces el sistema tiene solución única para cada $\alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ pues la matriz se escalona de manera perfecta como

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\alpha) & -4 \end{array}\right) \longrightarrow (0.5 \text{ ptos})$$

Así, $2(1-\alpha)x_4 = -4 \Rightarrow x_4 = \dfrac{2}{\alpha - 1}$

$$2\alpha x_3 - x_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2\alpha}\left(x_4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha + 3}{4\alpha(\alpha-1)}$$

$x_2 - x_3 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)x_4 = -1 \Rightarrow x_2 = x_3 - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)x_4 - 1$ de donde

$$x_2 = \frac{4\alpha^2 + \alpha + 3}{4\alpha(\alpha - 1)}$$

y de $2x_1 + x_2 + (1-2\alpha)x_3 + \frac{3}{2}x_4 = -5/2$, reemplazando x_2, x_3, x_4

se concluye $x_1 = -\dfrac{6\alpha^2 - \alpha + 3}{4\alpha(\alpha - 1)}$ $\longrightarrow$ (1.0 pto)

Resumiendo:

1) $\beta \neq \frac{1}{2}$ no hay solución
2) $\beta = \frac{1}{2}$ y $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$ no hay solución
3) $\beta = \frac{1}{2}$ y $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$ hay solución ÚNICA para $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$
4) NO HAY INFINITAS SOLUCIONES. $\longrightarrow$ (0.5 ptos)

PAUTA PROBLEMA 2 (ALG. LINEAL N°1)

a) (i) El sistema $L_1 \begin{cases} x+z=1 \\ \alpha x+y+z=0 \end{cases}$ se puede escribir como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\alpha & -\alpha \end{array}\right)$$ que tiene solución $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Así, $\begin{array}{l} x = 1-z \\ y = -\alpha-(1-\alpha)z \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z \\ -\alpha-(1-\alpha)z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es decir L_1 es una recta $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ 1.0

El sistema $L_2 \begin{cases} 2\alpha x+y+z=1 \\ x+y+z=-2 \end{cases}$ se escribe matricialmente como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-2\alpha & 1-2\alpha & 1+4\alpha \end{array}\right)$$

que tiene solución si $2\alpha-1 \neq 0$, es decir, $\alpha \neq 1/2$ $\longrightarrow$ 0.5

En tal caso, la solución será $y+z = \frac{1+4\alpha}{1-2\alpha} \Rightarrow y = \frac{1+4\alpha}{1-2\alpha} - z$

$x+y+z=-2 \Rightarrow x = -2 - \frac{1+4\alpha}{1-2\alpha} = \frac{-3}{1-2\alpha} = c^{te}$

Así $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{1-2\alpha} \\ \frac{1+4\alpha}{1-2\alpha} - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{1-2\alpha} \\ \frac{1+4\alpha}{1-2\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-2\alpha} \begin{pmatrix} -3 \\ 1+4\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ 0.5

En consecuencia las soluciones para L_1 y L_2 son las indicadas y L_1 y L_2 representan rectas si $\alpha \neq 1/2$

ii) Las ecuaciones vectoriales para L_1 y L_2 son:

$L_1: \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha-1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad L_2: \frac{1}{1-2\alpha} \begin{pmatrix} -3 \\ 1+4\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ 1.0

iii) L_1 y L_2 son ortogonales si sus vectores directores lo son.

De lo anterior, un vector director de L_1 es $\begin{pmatrix} -1 \\ \alpha-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y un vector director de L_2 es $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L_1 y L_2 son ortogonales si $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$$\Leftrightarrow 1-\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=2 \longrightarrow 0.5$$

Para $\alpha=2$ las rectas son $L_1: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

y $L_2: -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para determinar $L_1 \cap L_2$ se debe resolver

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -\lambda = 0 \\ \lambda+\mu = -1 \\ \lambda-\mu = 0 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ que evidentemente no tiene solución

Sigue que $L_1 \cap L_2 = \emptyset \longrightarrow 0.5$

b) $\Pi: x+y+z=1$

Un vector normal al plano Π es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y la recta por O y perpendicular a Π será $L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Así, para $L \cap \Pi$ se debe cumplir $\lambda+\lambda+\lambda=1 \Rightarrow \lambda = 1/3$

Sigue que la proyección de O sobre Π es $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \longrightarrow 1.5$

La distancia de O a Π será $d = \dfrac{|x_0+y_0+z_0-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow 0.5$

a) $A, B \in M_{nn}$, $A = AB \wedge B = BA$

Por demostrar que A y B son idempotentes.

En efecto $A^2 = (AB)(AB) = \underset{\text{Asociat.}}{A(BA)B} = (AB)B \underset{\text{def.}}{=} A \cdot B = A$. $\longrightarrow$ 1.0

Analogamente $B^2 = (BA)(BA) = B(AB)A \underset{\text{def}}{=} (B \cdot A) \cdot A \underset{\text{def}}{=} B \cdot A = B$. $\longrightarrow$ 1.0

b) (b1) $M(\lambda) = I + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2} A^2$

$M(\lambda) \cdot M(\beta) = \left(I + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2} A^2\right) \cdot \left(I + \beta A + \frac{\beta^2}{2} A^2\right)$ desarrollando

$= I + I\beta A + I\frac{\beta^2}{2} A^2 + \lambda A I + \lambda\beta A^2 + \cancel{\frac{\lambda\beta^2}{2} A^3}^{\,0} + \frac{\lambda^2}{2} A^2 I + \cancel{\frac{\lambda^2}{2} \beta A^3}^{\,0} + \cancel{\frac{\lambda^2\beta^2}{4} A^4}^{\,0}$

$\cancel{A^3} \cdot A$

$= I + \beta A + \frac{\beta^2}{2} A^2 + \lambda A + \lambda\beta A^2 + \frac{\lambda^2}{2} A^2$ $\longrightarrow$ 1.0

$= I + (\lambda + \beta) A + \frac{(\lambda+\beta)^2}{2} A^2 = M(\lambda + \beta)$

Sigue que $M(\lambda + \beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$ $\longrightarrow$ 1.0

(b2) Por demostrar que $(G, \cdot)$ es grupo Abeliano donde $G = \{ M(\lambda) \in M_{nn} / \lambda \in \mathbb{R} \}$

i) Cerrado: $M(\lambda), M(\beta) \in G \Rightarrow M(\lambda) M(\beta) = M(\lambda + \beta) \in G$ pues $(\lambda + \beta) \in \mathbb{R}$

ii) Asociatividad: Se cumple $\forall M_1, M_2, M_3 \in M_{nn}$

iii) Abeliano: $\forall M(\lambda), M(\beta) \in G$, $M(\lambda) \cdot M(\beta) = M(\lambda + \beta) = M(\beta + \lambda) = M(\beta) \cdot M(\lambda)$

iv) Neutro: Basta tomar $\lambda = 0$. Así $M(0) = I + 0 \cdot A + 0 \cdot A^2 = I$ $\longrightarrow$ 1.0

V) Inversos: $\forall M(\lambda) \in G$, $M(-\lambda) \in G$ y $M(\lambda) \cdot M(-\lambda) = M(0) = I$

Sigue que $(M(\lambda))^{-1} = M(-\lambda)$.

En consecuencia, $(G, \cdot)$ es grupo ABELIANO $\longrightarrow$ 1.0