Pauta P2 CONTROL 2 AL OTOÑO-09

P2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, x+y+3z)$

(i) T es lineal : $T(\alpha(x,y,z)+(u,v,w)) = \alpha T(x,y,z) + T(u,v,w)$

$T(\alpha(x,y,z)+(u,v,w)) = T(\alpha x+u, \alpha y+v, \alpha z+w) = (\alpha x+u+\alpha y+v+\alpha z+w,$

$= (\alpha x+u+\alpha y+v+\alpha z+w, \alpha x+u+\alpha y+v-\alpha z-w, \alpha x+u+\alpha y+v+3\alpha z+3w)$

$= (\alpha(x+y+z)+(u+v+w), \alpha(x+y-z)+(u+v-w), \alpha(x+y+3z)+(u+v+3w))$

$= \alpha(x+y+z, x+y-z, x+y+3z) + (u+v+w, u+v-w, u+v+3w) = \alpha T(x,y,z) + T(u,v,w).$

(ii) Base de $\operatorname{Ker} T$ y $\dim(\operatorname{Ker} T)$. $\operatorname{Ker} T = \{(x,y,z) : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$T(x,y,z) = (0,0,0)$ ssi $x+y+z=0$; $x+y-z=0$; $x+y+3z=0 \to$ Ec 1 - Ec 2 $\Rightarrow 2z=0$, i.e. $z=0$

y $z=0$, implica $x+y=0$, i.e. $y=-x$, y por lo tanto, $\therefore \operatorname{Ker} T = \{(x,-x,0) : x \in \mathbb{R}\}$

Como $(x,-x,0) = x(1,-1,0)$, $B_K = \{(1,-1,0)\}$ es base de $\operatorname{Ker} T$ y $\dim \operatorname{Ker} T = 1$.

(iii) Encontrar B base de $\mathbb{R}^3$ tal que $B_K \subset B$, y obtenga una base de $\operatorname{Im} T$ usando B.

(1.0) Por T. completación de la base, existe B base de $\mathbb{R}^3$ tal que $B_K \subset B$
Para aplicar este teorema, usamos la base canonica de $\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
de modo de ir agregando vectores a B_K hasta obtener la base requerida
$B' = B_K \cup \{(1,0,0)\} = \{(1,-1,0),(1,0,0)\}$, claramente es l.i. y $B' \cup \{(0,0,1)\} = \{(1,-1,0),(1,0,0),(0,0,1)\} = B$
tambien es l.i., y por lo tanto es base de $\mathbb{R}^3$, que contiene a B_K.

(1.0) Como $B_K = \{(1,-1,0)\}$ es base de B, entonces $T(B-B_K)$ es base de $\operatorname{Im}(T)$.
$B - B_K = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$, $T(1,0,0) = (1,1,1)$, $T(0,0,1) = (1,-1,3)$, implicando $\{(1,1,1),(1,-1,3)\}$ es base de $\operatorname{Im} T$.
Como $\operatorname{Ker} T \neq \{(0,0,0)\}$, T no es inyectiva y como $\dim \operatorname{Im} T = 2$, T no es epiyectiva.

(iv) Encuentre s.e.v. U tal que $\mathbb{R}^3 = U \oplus \operatorname{Im} T$ y establezca relaciones entre $\operatorname{Ker} T$, $\langle B - B_K \rangle$ U e $\operatorname{Im}(T)$.

(1.5) Como $B_I = \{(1,1,1),(1,-1,3)\}$ es base de $\operatorname{Im} T$, por el T. Completación de la base, existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $B_I \cup \{v\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y $U = \langle \{v\} \rangle$ es el s.e.v. pedido.
Se aplica el teorema usando base canonica: se det. si $B_I \cup \{(1,0,0)\}$ es l.i.
$\alpha(1,1,1) + \beta(1,-1,3) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0)$ implica $\alpha+\beta+\gamma = 0$, $\alpha-\beta=0$, $\alpha+3\beta=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$
y resulta que $B_I \cup \{(1,0,0)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y $U = \langle \{(1,0,0)\} \rangle$ es el s.e.v. pedido.

(0.5) Como $\mathbb{R}^3 = \langle \{(1,-1,0),(1,0,0),(0,0,1)\} \rangle$, donde $\{(1,-1,0)\}$ es base de $\operatorname{Ker} T$ y $T(B-B_K)$ es base de $\operatorname{Im} T$, Ademas, como $\mathbb{R}^3 = \langle \{(1,1,1),(1,-1,3),(1,0,0)\} \rangle$ y $\operatorname{Im} T = \langle \{(1,1,1),(1,-1,3)\} \rangle$
se cumplen las siguientes identificaciones entre los s.e.v. considerados.
$\operatorname{Ker} T$ con $\langle \{(1,0,0)\} \rangle$ y $\langle \{(1,0,0),(0,0,1)\} \rangle$ con $\operatorname{Im}(T)$.

Pauta P1 CONTROL 2 AL   OTOÑO-09

P1. (a) $p,q \in \mathcal{P}_n$, $\{p,q\}$ es l.i. Demuestre que $\{p,q,pq\}$ es l.i ssi $gr(p)\geq 1$, $gr(q)\geq 1$

(1.0) ($\Rightarrow$) Suponga $gr(p)=0$, i.e. $p(t)=c$ (cte), implica $pq=cq$, y por definicion resulta que $\{p,q,pq\}=\{p,q,cq\}$ es l.dep., contradiciendo hipotesis ($\{p,q,pq\}$ es l.i.)
(Si $c=0$, $p=0$, contradice hipotesis $\{p,q\}$ es l.i.) Por lo ~~tanto~~, $gr(p)\geq 1$ (idem para q)

($\Leftarrow$) Suponga $\{p,q,pq\}$ es l. dep., i.e., existen α,β,γ, t.q. $\alpha p+\beta q+\gamma pq=0$.

(1.0) Si $\gamma\neq 0$, $pq=(-\frac{\alpha}{\gamma})p+(-\frac{\beta}{\gamma})q$, implica $gr(pq)=\max\{gr(p),gr(q)\}$, pero $gr(pq)=gr(p)+gr(q)$ implicando $gr(p)+gr(q)=\max\{gr(p),gr(q)\}$, contradiccion ya que $gr(p)\geq 1$ y $gr(q)\geq 1$.
Por lo tanto, $\gamma=0$, implica $\alpha p+\beta q=0$, por hipot. resulta $\alpha=\beta$, implica $\{p,q,pq\}$ es l.i.

(b) V e.v., U,W s.e.v. de V tal que $\dim V=3$, $\dim U=\dim W=2$, $U\neq W$. Dem. $\dim(U\cap W)=1$

(1.5) Por hipot., existen $u_1,u_2\in V$ t.q. $\{u_1,u_2\}$ es base de U. Como $U\neq W$, existe $w\in W$ tal que $w\notin\langle\{u_1,u_2\}\rangle=U$, implica $\{u_1,u_2,w\}$ es l.i., y como $\dim V=3$, $\{u_1,u_2,w\}$ es base de V, implicando $V=U+W$, y como $\dim(V)=\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$ y la hipotesis de las dimensiones implica $3=2+2-\dim(U\cap W)$, i.e. $\dim(U\cap W)=1$. (0.5)

(c) $\{v_1,v_2,v_3\}=\{(1,2,1),(-2,1,-1),(1,1,1)\}$. Encuentre T lineal t.q. $T(v_1)=(1,2,3)$, $T(v_2)=(0,0,0)$, $T(v_3)=(2,1,3)$

Si $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ es base, y $v=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$, entonces $T(v)=\alpha T(v_1)+\beta T(v_2)+\gamma T(v_3)$.

(0.5) Si B es l.i., es base. B es l.i. ssi $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0$, implica $\alpha=\beta=\gamma=0$.
$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0$ ssi $\alpha-2\beta+\gamma=0$; $2\alpha+\beta-\gamma=0$; $\alpha-\beta+\gamma=0$. Ec1 - Ec3 $\Rightarrow\gamma=0\Rightarrow\alpha=\beta=0$. B es base

(1.5) Calculo de $T(x,y,z)$: $v=(x,y,z)=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=(\alpha-2\beta+\gamma,2\alpha+\beta+\gamma,\alpha-\beta+\gamma)$,
y esta igualdad implica el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}\alpha-2\beta+\gamma&=x\\ 2\alpha+\beta-\gamma&=y\\ \alpha-\beta+\gamma&=z\end{aligned}\right\}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&x\\2&1&1&y\\1&-1&1&z\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&x\\0&5&-1&y-2x\\0&1&0&z-x\end{array}\right]\rightarrow\beta=z-x\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\gamma&=-3x-y+5z\\ \alpha&=2x+y-3z\end{aligned}\right.$$

Como $T(v)=\alpha T(v_1)+\gamma T(v_3)$, ($T(v_2)=(0,0,0)$), reemplazando α y γ:
resulta $T(v)=T(x,y,z)=(2x+y-3z)(1,2,3)+(-3x-y+5z)(2,1,3)$

i.e., $T(x,y,z)=(-4x-y+7z,\ x+y-z,\ -3x+6z)$.

Pauta P3 CONTROL 2 AL OTOÑO'09

P3. (Seccion J. Gonzalez)

Sea V e.v. de dimension n y $T: V \to V$ lineal

(a) Demuestre que $Ker(T) \subset Ker(T^2)$ y $Im(T^2) \subset Im(T)$

- Si $v \in Ker T$, $T(v) = 0$, implica $T(T(v)) = T(0)$, ie. $T^2(v) = 0$ (T lineal, $T(0) = 0$) implicando $Ker(T) \subset Ker(T^2)$.
- Sea $u \in Im(T^2)$, existe $v \in V$ tal que $T^2(u) = w$, ie. $T(T(u)) = w$ por definicion $T(u) \in Im(T)$, implicando la existencia de $w \in V$ tal que $w = T(u)$, lo que a su vez implica, $u \in Im(T)$, lo que demuestra $Im(T^2) \subset Im(T)$

(b) $T^2 = 0$ ssi $Im(T) \subset Ker(T)$, concluya que rango$(T) \leq n/2$

($\Rightarrow$) Sea $u \in Im(T)$, existe $v \in V$ tal que $u = T(v)$, implicando $T(u) = T(T(v)) = T^2(v)$

Como $T^2 = 0$, resulta que $T(u) = 0$, ie. $u \in Ker(T)$, y $Im(T) \subset Ker(T)$.

($\Leftarrow$) Si $u \in Im(T)$, entonces $u \in Ker(T)$, por lo tanto, existe $v \in V$ tal que $u = T(v)$ y $T(u) = 0$, implicando $T(T(u)) = T(0)$, ie. $T^2(u) = 0$, todo $u \in Im(T)$ y como $Im(T^2) \subset Im(T)$ resulta $T^2(u) = 0$, todo $u \in Im(T^2)$, y como por definición $T^2(u) = 0$, todo $u \in Ker(T^2)$, sigue que $T^2 = 0$.

Ademas, como $Im(T) \subset Ker(T)$, $\dim(Im(T)) \leq \dim(Ker(T))$, y por el T. del Nucleo-Imagen, se tiene $n = \dim Ker T + \dim Im(T) \geq 2\, Im(T)$.

(c) Sea $V = \mathbb{R}^2$. Encuentre T tal que $Ker(T) = Im(T)$.

T debe ser tal que si $(u,v) = T(x,y)$, entonces $T(u,v) = T^2(x,y) = (0,0)$

$T(x,y) = (y,0)$ cumple lo anterior, ya que $T(T(x,y)) = T(y,0) = (0,0)$

i.e., $T^2 = 0$, y por (b), $Im(T) \subset Ker(T)$, y como $Im(T) \neq \{0\}$, $\dim(Im(T)) > 0$ y por (b) $\dim(Im(T)) \leq 1$ implicando $\dim Im T = 1$ y tambien, $\dim Ker T = 1$, concluyendo que $Ker T = Im T$ (porque $Im T \subset Ker T$).