Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 08-2

Pauta Control 2

P1. (a). (i) Sea $A, B \in M_{23}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} T(\alpha A + \beta B) &= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \frac{(\alpha a_{12}+\beta b_{12})+(\alpha a_{21}+\beta b_{21})}{2} \\ \frac{(\alpha a_{12}+\beta b_{12})+(\alpha a_{21}+\beta b_{21})}{2} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \frac{\alpha(a_{12}+a_{21})}{2} \\ \frac{\alpha(a_{12}+a_{21})}{2} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta b_{11} & \frac{\beta(b_{12}+b_{21})}{2} \\ \frac{\beta(b_{12}+b_{21})}{2} & \beta b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(A) + \beta T(B) \end{aligned}$$

(ii) Sea $A \in \text{Ker } T$, entonces:

$$T(A) = 0 \Rightarrow a_{11} = 0, a_{22} = 0, a_{12} = -a_{21}$$

Luego toda matriz A en el Ker T cumple que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es facil ver que las matrices son l.i,(basta tomar las coordenas (1,2), (3,1) , (3,2)(. Luego una base del Ker T es :

$$\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Para calcular la imagen notamos que la imagen de toda matriz se puede descomponer como:

$$a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que implica que una base para la imagen es:

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b). (i) Como el tercer vector se puede escribir como combinación lineal de los anteriores (tomando $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$), vemos que no es un conjunto l.i. Asi que para encontrar una base del Ker basta tomar los dos primeros vectores. Lo anterior implica que la dimensión del Ker es 2.

(ii) Para encontrar la imagen de un vector (x_1, x_2, x_3) lo descomponemos en una base de $\mathbb{R}^3$. Notando que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - 2x_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_2 + 2x_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego aplicando f se tiene que:

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - 2x_1) f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_2 + 2x_1) f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (x_3 - x_2 + 2x_1) f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (x_3 - x_2 + 2x_1) \end{pmatrix}$$

(iii) De la parte anterior se ve que una base de la imagen es $B = (0, 0, 1)$.

(iv) Como el Ker f no e scero la función no es inyectiva. Por otro lado le vector $(1, 0, 0)$ no tiene preimagen, así que la función no es epiyectiva.

P2. En el siguiente problema $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ denota el espacio vectorial de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 3. Considere el subespacio vectorial $U = \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) / p(1) = p'(1) = 0\}$

(a) (1.5 pto) Encuentre una base de U y su dimensión.

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. El polinomio p pertenece a U si y solo si cumple las dos condiciones siguientes

$$\begin{aligned} p(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ p'(1) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$a_0 = a_2 + 2a_3, \qquad a_1 = -2a_2 - 3a_3$$

por lo que

$$\begin{aligned} U &= \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) / p = (a_2 + 2a_3) + (-2a_2 - 3a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3\} \\ &= \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) / p = a_2(1 - 2x + x^2) + a_3(2 - 3x + x^3)\} \\ &= \langle\{(1 - 2x + x^2), (2 - 3x + x^3)\}\rangle \end{aligned}$$

El conjunto $\beta = \{(1 - 2x + x^2), (2 - 3x + x^3)\}$ es generador de U y es l.i. (basta observar, por ejemplo, que el término x^3 aparece sólo en uno de los vectores). Por lo tanto β es base de U y el subespacio tiene dimensión 2.

β es una de las bases de U. Otra base que se podría encontrar fácilmente es $\beta' = \{(1-x)^2, (1-x)^3\}$. Para esta base o cualquier otra que propongan deben probar (evidentemente) que es l.i. y que genera U.

(b) (1.5 pto) Extienda la base de la parte anterior a una base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

Hay varias formas de hacer esta extensión. Puede ser que se den cuenta que agregando los vectores $\{1, x\}$ (u otro par de vectores) a β se encuentra una base. Si lo hacen de esta manera, deben probar que el conjunto extendido es l.i. y que es generador de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

Otra posibilidad es que lleven este problema a $\mathbb{R}^4$ y utilicen el algoritmo de extensión propuesto en clase (guía semana 8):

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la base se construye tomando las columnas de la matriz $(A|I)$ que están asociadas a pivotes, es decir, las cuatro primeras. Estas columnas están asociadas al conjunto de vectores $\{(1 - 2x + x^2), (2 - 3x + x^3), 1, x\}$ que resulta base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

(c) Considere ahora el subespacio vectorial $W = \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) / p''(0) = 0\}$.

(i) (1 pto) Encuentre una base de W y su dimensión.

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. El polinomio p pertenece a W si y solo si $a_2 = 0$.

$$\begin{aligned} W &= \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})/p = a_0 + a_1 x + a_3 x^3\} \\ &= \langle\{1, x, x^3\}\rangle \end{aligned}$$

y el conjunto generador encontrado es obviamente l.i. Por lo tanto $\beta_W = \{1, x, x^3\}$ es base de W y la dimensión del subespacio es 3.

(ii) (1 pto) Encuentre una base $U \cap W$ y su dimension.

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})/a_0 = 2a_3, a_1 = -3a_3, a_2 = 0\} \\ &= \langle\{2 - 3x + x^3\}\rangle \end{aligned}$$

$\dim(U \cap W) = 1$.

(iii) (1 pto) Encuentre $U + W$.
Como conocemos las dimensiones de los subespacios U, W y $U \cap W$, podemos calcular fácilmente la dimensión del subespacio $U + W$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 4.$$

Y como $U + W \subseteq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ y $\dim(U + W) = \dim \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, se concluye que $U + W = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.
También se considera correcto, resolver esta parte utilizando la definición de $U + W$ y si se concluye $U + W = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

P3. **(a).** Basta tomar $\lambda_i = 1$ para todo $i \in \{a+1, a+2, \dots, b\}$ y $\lambda_i = 0$ para el resto.(Si ponen $i \in \{a, a+1, \dots b\}$ dar 0,7 ptos.)

(b).

$$\alpha f(x) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1,i)}(x) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i) \mathbb{1}_{[i-1,i)}(x)$$

Luego, tomando $\lambda_i' = (\alpha\lambda_i)$ se tiene que $g \in F$

(c). Solo falta probar que para $f, g \in F$ se tiene que $f + g \in F$ Sea $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1,i)}(x)$ y $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{[i-1,i)}(x)$ tenemos que:

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \alpha_i) \mathbb{1}_{[i-1,i)}(x)$$

Basta tomar $\lambda_i' = \lambda_i + \alpha_i$ para probar que $f + g \in F$.

(d). Sean $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1,i)}(x) = 0$$

Sea $1 \le i \le n$. Evaluando la expresión anterior en algún $\overline{x} \in [i-1, i)$ se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1,i)}(\overline{x}) = \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1,i)}(\overline{x}) = 0$$

Lo que implica que $\lambda_i = 0$.

(e). De la definición de F podemos ver que el conjunto B de la parte (d) es un generador de F. De la parte (d) vemos además que B es un conjunto l.i, por lo tanto B es una base de F.

(f). Como B es una base de F, definamos el isomorfismo que manda B en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir, para todo $1 \le i \le n$ definimos $T(\mathbb{1}_{[i-1,i)}) = e_i$ donde e_i es el i-esimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.
En este caso tenemos que $T(\mathbb{1}_{[a,b)}) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ con $v_i = 1$ si $i \in \{a+1.a+2, \dots, b\}$ y $v_i = 0$ en otro caso.