Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1102 Algebra Lineal 09-2

Pauta Control 3 - Pregunta 1

(i) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v \neq 0$ un vector propio de A y $\lambda \in \mathbb{R}$ su valor propio asociado. (0.5pts)

Entonces $Av = \lambda v \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 0.$$

Esto ratifica que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A y $\lambda = 0$ su valor propio asociado. (0.5 pts)

(ii) Se sabe que tambien $\lambda = 4$ es valor propio de A. Para calcular el espacio propio W_4 asociado a $\lambda = 4$ se tiene:

$$(A - 4I) \begin{pmatrix} \lambda \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y + z + w = 0$$

Así, $x = -y - z - w$ con y, z, w libres (por ejemplo)

Entonces $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto una base de vectores propios para W_4 puede ser

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

Para obtener la base ortonormal asociada aplicamos Gram-Schmidt. (1.0 pto)

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\-2\\0 \end{pmatrix}$$

y $v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}\|} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1\\1\\-2\\0 \end{pmatrix}$ (1.0 pto)

$$\tilde{v}_3 = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2 = \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$$

$$-\langle \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1\\1\\-2\\0 \end{pmatrix}\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1\\1\\-2\\0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1\\1\\-2\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-3 \end{pmatrix}$$

y $v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = -\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-3 \end{pmatrix}$ (1.0 pto)

La base ortonormal para W_4 será $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1\\1\\-2\\0 \end{pmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-3 \end{pmatrix} \right\}$

El espacio asociado a $\lambda = 0$ tiene por base $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\} = \{v\}$, vector que es ortogonal a v_1, v_2 y v_3 y normalizado constituye el cuarto vector de la base ortonormal pedida (espacio W_0)

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1\\1\\-2\\0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ v_1, v_2, v_3, \frac{v}{\|v\|} \right\}.$ (1.0 pto)

(iii) $P(\lambda)$ puede escribirse, para esta matriz que es simétrica y por lo tanto diagonalizable como,
$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - 0)^k(\lambda - 4)^m$
donde $k + m = n = 4$ y k, m son las dimensiones de los espacios W_0 y W_4 (1.0 pto)
Sigue que $P(\lambda) = (-1)^4\lambda^1(\lambda - 4)^3 = \lambda(\lambda - 4)^3$

Pauta Control 3 - Pregunta 2

La ecuación en estudio es $(\alpha+2)x^2+(\alpha+2)y^2+2\alpha xy=1$, $\alpha\in\mathbb{R}$. La forma cuadrática de la cónica se puede escribir como:

$$(\alpha+2)x^2+(\alpha+2)y^2+2\alpha xy=(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ donde } A=\begin{pmatrix} \alpha+2 & \alpha \\ \alpha & \alpha+2 \end{pmatrix}.$$

Determinamos los valores y vectores propios de A.

El polinomio característico es $P(\lambda)=\begin{vmatrix} \alpha+2-\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha+2-\lambda \end{vmatrix}$

$P(\lambda)=0\Rightarrow(\alpha+2-\lambda)^2-\alpha^2=0\Rightarrow(2\alpha+2-\lambda)(2-\lambda)=0\begin{cases} \lambda_1=2 \\ \lambda_2=2(\alpha+1) \end{cases}$ (1.0 pto)

Si $\lambda_1=\lambda_2\Rightarrow 2(\alpha+1)=2\Rightarrow\alpha=0$ y en tal caso la ecuación queda $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ que es una circunferencia centro $O(0,0)$ y $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Para $\alpha\neq 0$

El vector propio $v_1=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1=2$ debe cumplir $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow x+y=0\Rightarrow x+y=0\Rightarrow y=-x$ de donde un vector propio será $v_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (unitario).

Para $\lambda_2=2(\alpha+1)$ se tiene

$$\begin{pmatrix} (\alpha+2)-(2\alpha+2) & \alpha \\ \alpha & (\alpha+2)-(2\alpha+2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow y=x$$

y un vector propio unitario será $v_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (1.0 pto)

Así,la matriz A puede escribirse como $A=PDP^t$ donde $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ y $P=\{v_1,v_2\}$.

Entonces $A=PDP^t=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(1+\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Considerando el cambio de varaibles

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=P^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c} -x+y=u\sqrt{2} \\ x+y=v\sqrt{2} \end{array}$$

y por lo tanto $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(v-u)$; $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(v+u)$.

Reemplazando en la ecuación original queda

$$(\alpha+2)\frac{1}{2}(v-u)^2+(\alpha+2)\frac{1}{2}(v+u)^2+2\alpha\frac{1}{2}(v^2-u^2)=1$$

$$\Rightarrow(\alpha+2)(v^2+u^2)+\alpha(v^2-u^2)=1$$

$\Rightarrow 2u^2+2(\alpha+1)v^2=1$ (1.0 pto)

Entonces, si $\alpha=-1\Rightarrow u=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ que en las variables originales son las rectas paralelas
$y=x+1\wedge y=x-1$ (1.0 pto)

Si $\alpha+1>0$, es decir $\alpha\in(-1,\infty)$ y $\alpha\neq 0$ la ecuación
$2u^2+2(\alpha+1)v^2=1$ representa elipses. (1.0 pto)

Si $\alpha + 1 < 0$, es decir $\alpha \in (-\infty, -1)$ la ecuación representa hipérbola.

Con lo visto, α recorre $\mathbb{R}$ y por lo tanto no existen valores de α que transformen la ecuación propuesta en parábolas en un punto o en el conjunto vacío. (0.5 pto)

Pauta Control 3 - Pregunta 3

(a) Sea $[\alpha, \beta]$ la segunda fila dela matriz A, es decir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Para cada vector propio debe cumplirse que $Av = \lambda v$.

Así para $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y λ_1 valor propio.

Entonces

$$\begin{matrix} 12 = 3\lambda_1 \\ 3\alpha + \beta = \lambda_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ 3\alpha + \beta = 4 \end{matrix}$$

(1.0 pto)

Análogamente, para $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 10 = 2\lambda_2 \\ 2\alpha + \beta = \lambda_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_2 = 5 \\ 2\alpha + \beta = 5 \end{matrix}$$

(1.0 pto)

De las ecuaciones $\begin{matrix} 3\alpha + \beta = 4 \\ 2\alpha + \beta = 5 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = -1, \beta = 7$ (1.0 pto)

Sigue que $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

(b) La matriz B buscada es diagonalizable pues admite una base de vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (del punto $(a-1)$).

Así, $B = PDP^{-1}$ donde P es la matriz cuyas columnas son v_1 y v_2 y D es la matriz diagonal con los valores propios dados $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_2 = 0$; $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Entonces $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (inmediato). (1.0 pto)

Sigue que $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Para B^{10}; $B^{10} = (PDP^{-1})^{10} = PD^{10}P^{-1}$ pero $D^{10} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$ (1.5 pto)

Entonces $B^{10} = PDP^{-1} = B$