\- Pauta P1 CONTROL 3 ALGEBRA LINEAL

P1. Sea A de mxn tal que las n columnas de A son l.i.

(i) Demuestre que $Ker(A) = Ker(A^TA)$.

(ii) Demuestre que $r(A^TA) = r(A)$, y concluya que A^TA es invertible.

(iii) ¿Qué puede decir respecto de AA^T?

Solución.

(i) Sea x en Ker(A), i.e., $Ax = 0$ $/A^T \bullet$, resulta: $A^T(Ax)=A^T0=0$, implica $(A^TA)x=0$, i.e., $x\in Ker(A^TA)$.
Recíprocamente, sea x en $Ker(A^TA)$, i.e., $(A^TA)x=0$ $/A^T \bullet$, $/x^T \bullet$, resulta $x^T(A^TAx)=x^T0=0$, implica $(Ax)^TAx=0$, y por lo tanto, $Ax=0$ (ya que, si $u=Ax$, $u^Tu=0$, implica $u=0$), i.e., $x\in Ker(A)$.

(ii) La hipótesis de A implica que $r(A)=n$ y $m\geq n$. Por (i), $nul(A)=dim(Ker(A)) = dim(Ker(A^TA))=nul(A^TA)$, y el T. de la nulidad y rango aplicado a A y A^TA implica $nul(A^TA) + r(A^TA) = n$ y $nul(A) + r(A) = n$, y como $nul(A) = nul(A^TA)$, se tiene que $r(A^TA) = r(A) = n$. Ademas, como A^TA es de nxn, sigue que A^TA es invertible.

(iii) La hipótesis de A implica que $r(A)=n$, $m\geq n$ y por propiedad de rango, $r(A^T)=n$. Si $m=n$, entonces A y A^T son invertibles lo que implica que AA^T es invertible. Si $m>n$, las m filas de A son l.dep., y las m columnas de A^T son también l.dep., lo que implica que $r(AA^T)<m$. En caso contrario, i.e., $r(AA^T)=m$, se tendría que $m=r(AA^T)\leq \min\{ r(A), r(A^T) \}= \min\{n,n\}=n$, implicando $m\leq n$, contradicción.

OTRA FORMA

(i) Sea x en Ker(A), i.e., $Ax=0$. Como $Ax = x_1A_{.1}+x_2A_{.2}+\ldots+x_nA_{.n}$, donde $A_{.j}$ es la columna j de A, y las columnas de A son l.i, $Ax=0$ implica $x_j=0$, todo j, y por lo tanto, $Ker(A) =\{0\}$. Para (i), basta probar que $Ker(A^TA)=\{0\}$,
Supongamos lo contrario, i.e., existe $x \neq 0$, tal que $(A^TA)x=0$, $/x^T \bullet$, implica $x^T(A^TAx)=x^T0=0$, i.e., $(Ax)^TAx=0$, y por lo tanto, $Ax=0$ (ya que, si $u=Ax$, $u^Tu=0$, implica $u=0$), i.e., $x\in Ker(A)$, y como $x \neq 0$, se contradice que $Ker(A) =\{0\}$. En resumen, se cumple que $Ker(A) = Ker(A^TA)=\{0\}$.

(ii) La hipótesis de A implica que $r(A)=n$ y $m\geq n$. Por (i), $nul(A)=dim(Ker(A)) = dim(Ker(A^TA))=nul(A^TA)=0$. El . de la nulidad y rango aplicado a A y A^TA implica $nul(A^TA) + r(A^TA) = n$ y $nul(A) + r(A) = n$, y como $nul(A)=nul(A^TA)=0$, sigue que $r(A)=r(A^TA)=n$. Ademas, como A^TA es de nxn, sigue que A^TA es invertible.

La parte (iii) no cambia.