

Pauta P2 CONTROL 3 ALGEBRA LINEAL

P2. Demuestre que $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{pmatrix} = -3x^2$. Mediante expansión según fila 1 y usando propiedades de determinantes.

Solución.

Calculo del determinante usando expansión según fila 1.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 0 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & x & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & x & 0 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} \\ &= - \left(\begin{vmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} x & x \\ x & 0 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{vmatrix} \right) - \left(\begin{vmatrix} x & 0 \\ x & x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{vmatrix} \right) \\ &= -(-x^2 + x^2 + x^2) + (-x^2 + 0) - (x^2 + 0) = -3x^2. \end{aligned}$$

Calculo del determinante usando propiedades.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{vmatrix} &= \left[\begin{matrix} \text{fila3} - \text{fila2} \\ \text{fila4} - \text{fila2} \end{matrix} \right] \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 0 & x - x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & -x \end{vmatrix} \quad (1) = \begin{pmatrix} \text{permutar} \\ \text{fila1 y fila2} \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x - x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & -x \end{vmatrix} \\ &= \left[\begin{matrix} \text{fila3} - x(\text{fila2}) \\ \text{fila4} - x(\text{fila2}) \end{matrix} \right] - \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2x & -x \\ 0 & 0 & -x & -2x \end{vmatrix} \\ &= \left[\begin{matrix} \text{fila4} - 1/2(\text{fila3}) \end{matrix} \right] - \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2x & -x \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}x \end{vmatrix} \\ &= - (\text{determinante de matriz triangular}) = - (\text{producto de los elementos de la diagonal}) \\ &= -3x^2. \end{aligned}$$

(Si después de obtener (1) calculan el determinante usando expansión según columna 1 y, el determinante de 3x3 que resulta lo siguen calculando usando expansión (e.g., según fila 1) el puntaje es 1.0, y si dicho determinante de 3x3 lo siguen calculando usando propiedades, el puntaje es 2.0)

