Pauta P4 Control 3 A.L. Otoño 08

P4. (i) Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$. Si v es ortogonal con cada v_i, entonces $v=0$

Solución

(1.5) Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$, existen escalares (únicos) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ t.q. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. Además, por hipótesis, v es ortogonal con cada v_i i.e., $\langle v, v_i\rangle = 0$, todo i. Usando la combinación lineal de v, resulta $\langle v, v\rangle = \langle \sum_k \alpha_k v_k, v\rangle = \sum_k \alpha_k \langle v_k, v\rangle = 0$, i.e., $\langle v,v\rangle = 0$, implica $v=0$.

(ii) Encuentre base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ que contenga al vector $(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$. Use G-S con $(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$, $(1,1,0)$ y $(1,1,1)$, y obtenga la combinación lineal de $(1,2,3)$ en términos de la base encontrada.

Solución

(1.0) Primero se comprueba que los tres vectores dados son l. indep. (para aplicar G-S), para lo cual se determina que la matriz formada por tales vectores es invertible (equivalentemente, determinante distinto de cero)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & -\frac{4}{5} \end{vmatrix} = (-\tfrac{4}{5}) - (-\tfrac{4}{5}) + (-3/5) = -\tfrac{3}{5}$$; por lo tanto, los vectores son l. indep.

Aplicación de G-S. $v_1 = (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$

(0.5) Se parte con $u_1 = (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$ $\quad (\|u_1\| = 1)$

(1.0)
- Se calcula $w_2 = v_2 - \alpha_2 u_1$, con $\alpha_2 = \langle v_2, u_1\rangle = \langle (1,1,0), (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})\rangle = \frac{3}{5}$

$w_2 = (1,1,0) - \frac{3}{5}(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}) = (\frac{16}{25}, 1, \frac{12}{25})$, $\|w_2\| = \sqrt{(\frac{16}{25})^2 + 1 + (\frac{12}{25})^2} = \frac{1}{5}\sqrt{41}$

y se obtiene $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{5}{\sqrt{41}}(\frac{16}{25}, 1, \frac{12}{25}) = \frac{\sqrt{41}}{205}(16, 25, 12)$

(1.0)
- Se calcula $w_3 = v_3 - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2$, con $\beta_1 = \langle v_3, u_1\rangle$, $\beta_2 = \langle v_3, u_2\rangle$

$\beta_1 = \langle (1,1,1), (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})\rangle = -\frac{1}{5}$, $\beta_2 = \langle (1,1,1), u_2\rangle = \frac{\sqrt{41}\ 53}{205}$

$w_3 = (1,1,1) + \frac{1}{5}(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}) - \frac{53\sqrt{41}}{205}(16, 25, 12) \equiv (a,b,c)$

$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$

(1.0) Combinación lineal de $(1,2,3)$ en términos de $\{u_1, u_2, u_3\}$.

$(1,2,3) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, y los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se calculan por

$\alpha_1 = \langle (1,2,3), u_1\rangle$, $\alpha_2 = \langle (1,2,3), u_2\rangle$, $\alpha_3 = \langle (1,2,3), u_3\rangle$ //