Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 08-1

Pauta Control 3

P1. (a) (i) Calculamos el polinomio caracteristico:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & 3 \\ 4 & -3-\lambda & 4 \\ 10 & -10 & 11-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{c_1+c_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 1-\lambda & -3-\lambda & 4 \\ 0 & -10 & 11-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{f_2-f_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -10 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-10)(\lambda-1) = -(\lambda-10)(\lambda-1)^2$$

Por lo tanto los valores propios son 1 y 10 con multiplicidad algebraica 2 y 1 respectivamente. 1,5

(ii) Calculemos los espacios propios:

Para $\lambda_1 = 1$ se tiene que $(x_1, x_2, x_3) \in Ker(A-I)$ ssi $x_1 = x_2 - x_3$, luego una base del espacio propio es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Por lo tanto su multiplicidad geometrica es 2. 1,0

Para $\lambda_2 = 10$ se tiene que $(x_1, x_2, x_3) \in Ker(A-10I)$ ssi $-2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ y $-5x_2 + 2x_3 = 0$, luego una base del espacio propio es $\left\{ \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 5/2 \end{pmatrix} \right\}$ Por lo tanto su multiplicidad geometrica es 1. 1,0

(iii) Finalmente dado que se tiene la igualdad de las multiplicidades, la matriz A es diagonalizable → 0,2 con:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3/4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

y matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

0,3

- Sea $k \in \mathbb{N}$, como $A = PDP^{-1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $A^i = PD^iP^{-1}$. → 0,5
  Luego:

$$\begin{aligned} B &= PP^{-1} + PDP^{-1} + \ldots + PD^kP^{-1} \\ &= P(I + D + D^2 + \ldots + D^k)P^{-1} \end{aligned}$$

0,5

Sea $G = (I + D + D^2 + \ldots + D^k)$. Recordando que $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ donde λ_i son los valores propios de A. Se tiene que G es una matriz diagonal con coeficientes

$$g_{ii} = \sum_{j=0}^{k} \lambda_i^j$$

pero como $\lambda_i \neq 1$ se tiene que:

$$g_{ii} = \frac{1-\lambda_i^{k+1}}{1-\lambda_i}$$

0,5

y como $\lambda_i \neq -1$ entonces $g_{ii} \neq 0$, luego G es invertible y su inversa $H = G^{-1}$ es una matriz diagonal con $h_{ii} = \frac{1-\lambda_i}{1-\lambda_i^{k+1}}$. Se concluye que:

$$B^{-1} = PHP^{-1}.$$

0,5

P2. (a) (i)

$$\begin{aligned}
p(x) &= 1, & T(p)(x) &= 1 = 1 + 0x + 0x^2 \\
p(x) &= x, & T(p)(x) &= 1 + x = 1 + 1x + 0x^2 \\
p(x) &= x^2, & T(p)(x) &= (1+x)^2 = 1 + 2x + 1x^2
\end{aligned}$$

1,0

Luego se tiene que

$$M_{AA}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1,0

(ii) Calculamos matriz P de cambio de base de A a B. Recordamos que $P = M_{B,A}(id)$ y como la base A es canónica se obtiene:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5

$M_{A,B}(id) = M_{B,A}(id)^{-1} = P^{-1}$. Luego:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1/2 - f_2/2 \to f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_3 + f_1 \to f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2 + f_1 \to f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Otra forma:

$$\begin{aligned}
p(x) = 1, &\quad 1 = 1/2(1+x) + 1/2(1-x) + 0(1+x+x^2) \\
p(x) = x, &\quad x = 1/2(1+x) - 1/2(1-x) + 0(1+x+x^2) \\
p(x) = x^2, &\quad x^2 = -1(1+x) + 1(1+x+x^2)
\end{aligned}$$

1,0

Luego

$$M_{A,B}(id) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente: $M_{B,B})(T) = M_{A,B}(id) M_{A,A}(T) M_{B,A}(id)$ de donde:

$$M_{B,B}(T) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5

(b) La base de Gram-Schmidt se obtiene mediante la formula:

$$w_i = v_i - \sum_{k=0}^{i-1} \langle v_i, u_k \rangle u_k, \quad u_i = w_i / \|w_i\|, \quad i \in \{1, \dots k\}$$

de donde

$$v_i = \sum_{k=0}^{i-1} \langle v_i, u_k \rangle u_k + \|w_i\| \, u_i$$

2,0

y se observa que los terminos de la columna i bajo la diagonal son 0 y se concluye que la matriz representante es triangular superior.

P3. **(a)** Si $v, z \in P(B), \lambda \in \mathbb{R}$ entonces existe $x, y \in B$ tal que $v = P(x), z = P(y)$ y $v+\lambda z = P(x)+\lambda P(y) = P(x+\lambda y)$ pues P es lineal. Como B es s.e.v. se tiene que $x+\lambda y \in B$ y por lo tanto $v+\lambda z \in P(B)$ y $P(B)$ es s.e.v. de W. 0,7

Para todo $y \in P(B)$ existe $x \in B$ tal que $y = P(x)$. Como $\{b_1, \ldots, b_k\}$ es un generador, existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales ques $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i b_i$. Luego $y = P(\sum_{i=1}^k \alpha_i b_i)$ y como P es lineal, $y = \sum_{i=1}^k \alpha_i P(b_i)$ y se concluye que $\{P(b_1), \ldots, P(b_k)\}$ es un generador. 0,8

(b) (I) Aplicamos Gram-Schmidt al conjunto

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \|w_1\| = 6, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \quad \to 0,2$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 3 \\ 7/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\|w_2\| = 2\sqrt{5}, \quad u_2 = \sqrt{5}/30 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow 0,5$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{5}/30 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \sqrt{5}/30 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Esto verifica que $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ es l.d. con respecto a u_1, u_2. No es necesario hace el calculo de w_3 si se observa que: $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. 0,5

Luego una base ortonormal de W es $\{u_1, u_2\}$ y $dim(W) = 2$. $\longrightarrow$ 0,3

(II) Observando que $x \in W^\perp$ si y solo si $\langle x, u_1 \rangle = 0$ y $\langle x, u_2 \rangle = 0$ entonces se tiene que $x \in W$ si y solo si resuelve el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + -3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ -7x_1 + 9x_2 + 7x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

que equivale a

$$\begin{aligned} x_1 + -3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

y tambien a

$$\begin{aligned} x_4 &= 2x_2 - 7x_3 \\ x_1 &= x_2 + 2x_3 = x_1 \end{aligned}$$

i.e., una base de $W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$ y $dim(W^{\perp}) = 2$. (1,0 por encontrar una base y dimensión de $W^{\perp}$)

Aplicamos Gram-schmidt a la base para ortonormalizarla:

$$\tilde{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\tilde{w_1}\| = \sqrt{6}, \tilde{u_1} = \tilde{w_1}/\sqrt{6}$$

.

$$\tilde{w_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\|\tilde{w}\|_2 = \sqrt{30}, \quad \tilde{u}_2 = 1/\sqrt{30} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

0,5

Y una base ortonormal de $W^{\perp}$ es $\{\tilde{u_1}, \tilde{u_2}\}$.

(III) Proyectamos cada vector de la base:

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sqrt{5}/30 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \sqrt{5}/30 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -4/3 \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \sqrt{5}/15 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/10 \\ -23/30 \\ -31/30 \\ -7/30 \end{pmatrix}$$

0,4

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \sqrt{5}/30 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \sqrt{5}/30 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -8/3 \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} + 2\sqrt{5}/15 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 23/15 \\ -31/15 \\ -7/15 \end{pmatrix}$$

0,4

Se observa

$$2P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Luego, una base para $P(B)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} -3/10 \\ -23/30 \\ -31/30 \\ -7/30 \end{pmatrix} \right\}$ y la dimensión de $P(B) = 1$.

0,7