Control 2

MA3701 2018-1

22 de agosto de 2018

Problema 1

Considere el grafo de la Figura 1, en el cual los valores sobre los arcos representan los costos unitarios y los valores en los nodos, las ofertas (demandas, si es negativo).

a) Complete una base inicial factible, que contenga los arcos (1,2), (2, 3) y (3, 4). Indique por qué es base y determine el valor de la función objetivo en dicha solución. **(1,5pt.)**

b) Diga si es óptima y por qué. **(1,5pt.)**

c) Itere una vez, para encontrar una mejor solución básica factible indicando el valor de la función objetivo correspondiente. **(3pt.)**

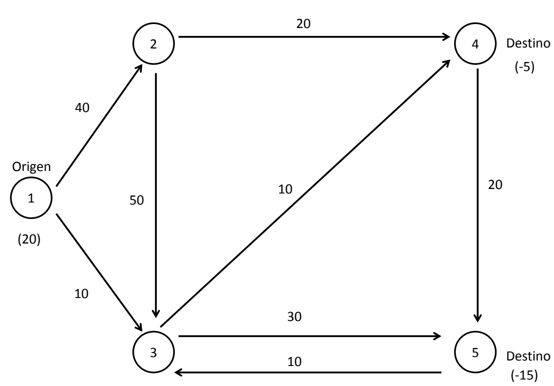

Figura 1: Grafo del Problema 1

Problema 2

Considere el problema:

$$\begin{gathered}\min\ x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2\\ x_1 + x_2 \leq 3\\ 2x_1 + 10x_2 \leq 20\\ x_1, x_2 \geq 0\end{gathered}$$

a) Para el problema con restricciones, realice una iteración del método de direcciones admisibles, con punto inicial $x^0 = (0,0)$. **(2pt.)**

b) Diga si el nuevo punto es óptimo, basando su respuesta en el teorema de KKT. **(2pt.)**

c) Si se considera la misma función objetivo, pero sin las restricciones, ¿cuántas iteraciones del método del gradiente son necesarias para garantizar un error de 10^{-6}, partiendo del punto $(0,0)$? **(2pt.)**
NOTA: El error se mide según el criterio $E(x) = \frac{1}{2}||x - x^*||_Q^2$, siendo Q, la matriz de la forma cuadrática correspondiente a la función objetivo y x^* la solución del problema.

Problema 3

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad f(x,y) := x^2 + y^2 \\ &s.a \qquad\quad 2x - y \leq -1 \end{aligned}$$

a) Plantee y resuelva el sistema de KKT para este problema. **(1,5pt.)**

c) Encuentre la solución del siguiente problema sin restricciones:

$$\text{mín}\, x^2 + y^2 + \frac{r}{2}[2x - y + 1]_+^2,$$

donde $r > 0$ es un parámetro real y la función $[\cdot]_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ se define como $[t]_+ = \text{máx}(t, 0)$.**(2pt.)**
Puede usar sin demostrar que para g derivable, $\nabla([g(x)]_+^2) = 2[g(x)]_+\nabla g(x)$.

d) Denote por (x_r, y_r) la solución del problema anterior. Encuentre el límite $(\bar{x}, \bar{y}) := \lim\limits_{r\to+\infty}(x_r, y_r)$. **(0,5pt.)**

e) Muestre que la condición de optimalidad del problema de la parte c) se puede escribir como:

$$\nabla f(x_r, y_r) + \nu_r \nabla g(x_r, y_r) = 0,$$

donde $g(x_r, y_r) = 2x_r - y_r + 1$. Identifique ν_r y calcule el limite $\bar{\nu} = \lim\limits_{r\to+\infty} \nu_r$. **(2pt.)**